

10. TEORIA DE LA RELATIVIDAD RESTRINGIDA [6]

10.1. **Sistemas de Galileo o Inerciales.** Es bien conocido el principio de la Mecánica que dice:

“Todo cuerpo abandonado libremente en el espacio se halla en reposo o está animado de un movimiento rectilíneo y uniforme”

Este principio se verifica casi con rigurosa exactitud si el movimiento del cuerpo es referido al sistema de “estrellas fijas” que constituyen el Universo, por lo que en lo sucesivo llamaremos sistema de coordenadas de Galileo, sistema de estrellas fijas, sistema de Galileo, o también sistema de inercia a un sistema cuyo origen coincida constantemente con el centro de gravedad de un cuerpo completamente libre en el espacio y la dirección de los ejes conserve el paralelismo con relación al sistema de referencia de las estrellas fijas.

10.2. **Principio de Galileo o Principio de la Relatividad de la Mecánica Ordinaria.** El principio de Galileo o también principio de la independencia de los movimientos, puede enunciarse de las siguientes maneras:

- “Si estudiamos las leyes de un fenómeno mecánico cualquiera referido a un sistema de ejes de Galileo, dichas leyes serán exactamente las mismas (invariantes) que si lo referimos a otro sistema de ejes que se halle en relación al primero en movimiento rectilíneo y uniforme”. Este nuevo sistema será, según la definición, un nuevo sistema de Galileo. Esto equivale a decir que todos los sistemas de Galileo son igualmente equivalentes para la expresión de las leyes de los fenómenos mecánicos;
- “Por medios mecánicos verificados en el interior de un sistema, es imposible poner de manifiesto el movimiento rectilíneo y uniforme de que el sistema pueda estar animado”
- El enunciado matemático de este principio como ya se ha dicho, consiste en la invarianza de las ecuaciones fundamentales de la mecánica al pasar de un sistema a otro que esté en movimiento rectilíneo y uniforme respecto al primero.

Este principio de Galileo es una consecuencia de las leyes fundamentales de la Mecánica expresadas por:

$$F = ma$$

y el grupo de fórmulas de transformación de Galileo, que sirve para pasar de un sistema de ejes de Galileo a otro de la misma clase paralelo al primero:

Espacio:

$$\begin{cases} x = x' + vt' & \text{donde } v = \text{constante} \\ y = y' \\ t = t' \end{cases}$$

Velocidad:

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vt'}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v \frac{dt'}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + v \frac{dt'}{dt'} = \omega_{x'} + v \\ \omega_y = \omega_{y'} \end{cases}$$

Aceleración:

$$\begin{cases} a_x = \frac{d\omega_x}{dt} = \frac{d\omega_{x'} + v}{dt} = \frac{d\omega_{x'} + v}{dt'} + \frac{d\omega_{x'}}{dt'} + \frac{dv}{dt'} = a_{x'} + 0 \\ a_y = \frac{d\omega_y}{dt} = \frac{d\omega_{y'}}{dt'} = a_{y'} \end{cases}$$

Ahora obtendremos las fórmulas $F = ma$ para cada sistema de referencia O y O' .

- Para el sistema O' que realiza experimentos mecánicos en reposo con respecto de él

$$F_{x'} = m' a_{x'}$$

$$F_{y'} = m' a_{y'}$$

- ¿Cuáles serán las fórmulas referidas al sistema O que ve O' con movimiento rectilíneo y uniforme? Sabemos que $m = m'$, $a_x = a_{x'}$ y $a_y = a_{y'}$, entonces:

$$(10.1) \quad F'_x = m' a_{x'} = m a_x = F_x$$

$$(10.2) \quad F'_y = m' a_{y'} = m a_y = F_y$$

Que son las fórmulas para el sistema O que ve a O' en movimiento rectilíneo y uniforme, de esto se desprende que tal ecuación $F = ma$ es un invariante (conserva su forma) bajo las transformaciones de Galileo. Aún más si los ejes de O y O' no fuesen paralelos se puede demostrar que:

$$F_x^2 + F_y^2 = F_{x'}^2 + F_{y'}^2$$

10.3. El movimiento absoluto. Si por medio de observaciones mecánicas interiores a un sistema es imposible determinar el estado de movimiento de traslación, será preciso recurrir a observaciones exteriores, y por este medio llegamos a determinar con mayor o menor precisión el movimiento de nuestro sistema solar con relación al sistema de estrellas fijas, pero el movimiento de conjunto de todas ellas escapa completamente a la observación por falta de puntos de referencia; de aquí que en realidad todos nuestros movimientos sean siempre relativos por la imposibilidad de definir el movimiento verdaderamente absoluto que tanto ha preocupado a los físicos y filósofos de todos los tiempos.

Con el objeto de resolver tan importante problema, los físicos intentaron buscar su solución fuera de la Mecánica propiamente dicha, recurriendo a fenómenos ópticos o eléctricos.

En áquel entonces varias teorías aparecieron para explicar principalmente aquellos fenómenos relacionados con la luz:

- **Teoría de la emisión.** Esta teoría suponía que la luz consistía en la proyección por el cuerpo luminoso de una multitud de partículas de lumínico que marchaban con velocidad constante y en línea recta, mientras el medio en que se movían era homogéneo, que se reflejaban y desviaban de su camino al hallar la superficie de separación de dos medios, etc.
- **Teoría ondulatoria.** Según esta teoría la luz es un movimiento ondulatorio parecido al del sonido, propagándose a través del aire, sin embargo había necesidad de un medio transmisor que explicase la propagación de la luz a través de los cuerpos transparentes y los vacíos más perfectos, así como las ondas sonoras necesitan un medio para propagarse - se decía - las ondas electromagnéticas necesitaban el suyo propio, de aquí un punto a favor para la idea posterior del *éter*.
- **Teoría Electromagnética de Maxwell.** Maxwell fusionó en una serie de ecuaciones los fenómenos eléctricos y magnéticos. En esta teoría del electromagnetismo, éste (el electromagnetismo) es la esencia misma de la luz, cuya propagación ocurre como ondas transversales a una velocidad constante c , de aproximadamente 3×10^8 m/s.

Al transformar las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo de un sistema inercial a otro, mediante las ecuaciones de Galileo, su conformación resulta alterada, lo que implica a preferir un sistema sobre otro. Sin embargo, como ya se vió las leyes newtonianas de la Mecánica mantienen siempre su forma descriptiva, independiente del estado de observación, es decir, no exhiben preferencia alguna sobre un marco de referencia al verse transformadas por las ecuaciones galileanas.

E.g. Demostrar que la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} = 0$$

en O' deducida de las ecuaciones de Maxwell no es invariante bajo las transformaciones de Galileo. De las ecuaciones de transformación de Galileo $x = x' + vt'$, $y = y'$ y $t = t'$, tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial x'}{\partial x'} + v \frac{\partial t'}{\partial x'} = 1 + v \cdot 0 = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} + v \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t'} + v \frac{\partial t'}{\partial t'} = v \\ \frac{\partial x}{\partial y'} = \frac{\partial x' + vt'}{\partial y'} = \frac{\partial x'}{\partial y'} + v \frac{\partial t'}{\partial y'} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{\partial t}{\partial x'} = \frac{\partial t'}{\partial x'} = 0 \\ \frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{\partial y}{\partial y'} = 1 \end{array} \right.$$

Como $\phi = \phi(x, y, t)$, aplicando la regla de la cadena y los resultados anteriores tenemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot 1 + 0 + 0 = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

De manera análoga encontramos que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}.$$

Además

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t'} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t'} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t'} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t'} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot v + 0 + \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= v \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} = -v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

Substituyendo estas ecuaciones en la ecuación de onda se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \left\{ v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right\} = 0 \text{ en el sistema de referencia } O$$

Puesto que la forma de la ecuación ha cambiado, se concluye que ésta no es invariante bajo las transformaciones de Galileo.

10.4. Problemas Sucitados. Al estar en puerta el siglo XX, los científicos de la época consideraron estos hechos como factores de confusión e incertidumbre, sobre todo en la interpretación de los valores observables. Para solucionar el problema se optó por afrontar tres posibles soluciones:

- Una de ellas consistía en admitir que la teoría de Maxwell era incorrecta debido a la asimetría de condiciones que se asumían en su formulación, por lo tanto había que sustituirla por otra que resultará invariante para cualquier punto de referencia.
- Otra solución consistía en rechazar las transformaciones galileanas y construir otras que se adaptarían a la teoría del electromagnetismo, lo que traería como consecuencia que se modificaran las leyes newtonianas del movimiento.
- La última solución sería justificar de algún modo un sistema absoluto de referencia, manteniendo tanto las leyes de Maxwell como las de Newton y las transformaciones galilenas, intactas.

Solución Seleccionada. Al principio los físicos se inclinaron por la tercer solución, porque creían que así como el sonido necesita de un medio para su propagación, la luz se desplazaba a través del suyo. Según parecía, al ser c una constante en la teoría del electromagnetismo, ese medio propio para la propagación lumínica, hipotéticamente identificado como el “éter luminoso”, se prestaba a la vez como el sistema absoluto de referencia.

Pero surgieron muchas problemas en relación a este medio hipotético:

- Su consistencia tendría que ser lo suficientemente rígida como para propagar la luz a poco menos de 3×10^8 m/s.
- Aparte de conservar su rigidez, su densidad tendría que ser muy pequeña para no interferir con el movimiento de los cuerpos celestes, porque de lo contrario ofrecería una resistencia tal a su desplazamiento, que llegaría a dejarlos en completo reposo o en colapso de unos con otros a causa de su mutua atracción gravitacional.
- ¿El éter está realmente fijo en el espacio o se mueve, es decir, cuando un cuerpo se traslada arrastra tras de sí éter que llena sus espacios interatómicos, o bien permanece fijo independientemente del movimiento del cuerpo?
- ¿Si el éter está fijo existe un viento de éter cuando un cuerpo se mueve, es decir, al moverse un cuerpo a través del éter que está estático, hay un choque entre el cuerpo y el éter?

Para contestar estas preguntas se realizaron varios experimentos, entre ellos el experimento de Fizeau cuyo objetivo era ver si el éter era o no arrastrado por los cuerpos en movimiento; el experimento de Michelson y Morley para constestar la pregunta de que si el éter estaba estático, habría un viento de éter. Estos experimentos tuvieron resultados negativos, es decir, el éter no es arrastrado y el éter no participa del movimiento de los cuerpos.

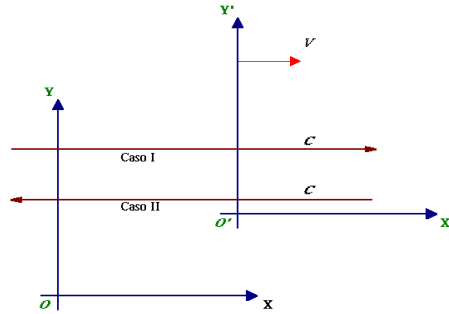
Einstein abandonó la idea del éter, y debido a ésto fué necesario desechar las transformaciones de Galileo y desarrollar otras, con lo cual las leyes newtonianas del movimiento tendrían que ser modificadas.

10.5. Postulados de la Relatividad Restringida.

- *“Por ningún procedimiento físico interior a un sistema es posible revelar el estado de movimiento rectilíneo y uniforme de que el sistema de inercia pueda estar animado o, en otra forma, las leyes que regulan los fenómenos físicos son las mismas en todos los sistemas de inercia que evidentemente se hallan en movimiento rectilíneo y uniforme los unos con relación a los otros, este postulado se le conoce como principio restringido de la relatividad.”*
- *“La velocidad de propagación de la luz es una constante universal, es decir, tiene el mismo valor en todas direcciones independientemente del estado de movimiento (rectilíneo y uniforme) del sistema, tanto si procede de un foco fijo como de un móvil, lo que se conoce con el nombre de principio de la isotropía del espacio.”*

10.6. Transformaciones de Lorentz. Sean dos sistemas de coordenadas de Galileo, rectangulares y en movimiento relativo, que por la condición de los sistemas será rectilíneo y uniforme, llame estos dos sistemas O y O' , respectivamente. Suponga dos casos, que una señal luminosa sea originada en algún sitio y que se mueve de izquierda a derecha, y otro en el sentido contrario Caso I y Caso II, respectivamente.

En el Caso I el rayo viaja de izquierda a derecha y en el Caso II viaja de derecha a izquierda:



Tomando en cuenta la dirección del rayo de luz del caso I, obtendremos para O' que

$$x' = ct'$$

o bien

$$(10.3) \quad x' - ct' = 0$$

Cada par de valores x' y t' representa un hecho y la ecuación $x' - ct' = 0$ representa la *historia del hecho*. Similarmente para O encontramos que

$$x = ct$$

de manera que

$$(10.4) \quad x - ct = 0$$

con el mismo valor para c y representa la historia del mismo *hecho*, pero referido al sistema O .

A cada valor de x le corresponde un valor de t .

Todo *hecho* cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación (10.3) satisfacen también a la ecuación (10.4) y viceversa, lo que puede expresarse analíticamente de esta manera

$$(10.5) \quad x' - ct' = \lambda(x - ct)$$

y siendo $\lambda \neq 0$, pues si se cumple la (10.5) a todo par de valores de x' y t' , que anule su primer miembro (ecuación (10.3)), corresponderán valores de x y t que anulen el segundo (ecuación (10.4)).

Suponga ahora el Caso II (sentido $-x$ de la señal luminosa).

Para O' tendremos $x' = -ct'$ y similarmente para O obtendremos $x = -ct$.

De manera que $x' + ct' = 0$ y para el otro sistema $x + ct = 0$, por lo que consideraciones similares nos conducen a

$$(10.6) \quad x' + ct' = \mu(x + ct) \quad \text{donde } \mu \neq 0 \text{ como en (10.5)}$$

Sumando y restando (10.5) y (10.6), tenemos

$$2x' = x(\lambda + \mu) - ct(\lambda - \mu)$$

$$-2ct' = x(\lambda - \mu) - ct(\lambda + \mu)$$

y haciendo $a = \frac{\lambda + \mu}{2}$ y $b = \frac{\lambda - \mu}{2}$ queda

$$(10.7) \quad \begin{cases} x' &= ax - bct \\ ct' &= act - bx \end{cases}$$

Falta determinar a y b .

En el origen del sistema O' tendremos constantemente $x' = 0$, por lo que de la primera de (10.7), deducimos

$$ax - bct = 0 \quad \text{ó} \quad x = \frac{bc}{a}t$$

ecuación que expresa la ley del movimiento del origen de O' respecto al sistema O con un valor de velocidad v igual a

$$(10.8) \quad v = \frac{bc}{a}$$

Si en el mismo sistema (10.7) hubiésemos hecho $x = 0$, como corresponde al origen de O , obtendríamos la ley del movimiento de O con respecto O' con una velocidad

$$v' = -\frac{bc}{a} = -v$$

tal como debe resultar según el principio de la relatividad.

Por otra parte, este mismo principio exige que, en cualquier momento, toda longitud, por ejemplo, la longitud unidad del metro-patrón, colocado paralelamente a la dirección del movimiento, en reposo respecto al sistema O' y medida desde el sistema O , sea exactamente igual a la longitud de esta misma unidad estando en reposo respecto O y medida desde el sistema O' . Las mediciones pueden ser hechas de la siguiente manera indicada: La barra se encuentra en O' y mide 1, pero para medirla desde O hay que efectuar una medición de la primer y última coordenada de esta barra al mismo tiempo, i.e. en $\Delta t = 0$, ya que el observador en O ve que la barra va moviéndose. Entre tanto en O' no es necesario hacer esto, ya que con respecto al observador en este sistema la barra se encuentra en reposo, y las mediciones de la primer y última coordenada se pueden efectuar a diferentes tiempos, si se desea.

Verificando las primeras mediciones dichas, en el momento $\Delta t = 0$, la primer ecuación de (10.7) nos da

$$\begin{aligned} x' &= ax \quad \text{o sea,} \\ \Delta x' &= a\Delta x \end{aligned}$$

donde se ha tomado sobre x' la longitud igual a la unidad ($\Delta x' = 1$), y se ha medido desde el sistema O obteniendo un valor Δx que, según la última expresión, valdrá

$$\Delta x = \frac{1}{a}$$

Las mediciones verificadas desde O' en el momento $t' = 0$, nos darán según (10.7) (Ahora, suponiendo que la barra se encuentra en reposo en O , sin embargo, un observador en O' la ve moviéndose, así que en este sistema habrá que efectuar las mediciones de la primer y última coordenada de la barra al mismo tiempo, i.e. en un lapso de tiempo $\Delta t' = 0$:

$$\begin{cases} \Delta x' &= a\Delta x - bc\Delta t \\ 0 &= -b\Delta x + ac\Delta t \end{cases}$$

eliminando Δt

$$a\Delta x = a^2\Delta x - b^2\Delta x = \Delta x(a^2 - b^2)$$

de donde

$$\Delta x' = \frac{a^2 - b^2}{a} \Delta x = a \frac{a^2 - b^2}{a^2} \Delta x = a \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \Delta x$$

o recordando que $v = \frac{bc}{a}$ queda

$$\Delta x' = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Delta x$$

Según esta expresión, la longitud-unidad colocada sobre el sistema O ($\Delta x = 1$) y medida desde el sistema O' ($\Delta x'$), valdrá

$$\Delta x' = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

Según lo dicho antes, los dos resultados Δx y $\Delta x'$ deben ser iguales; por lo tanto, tenemos

$$\frac{1}{a} = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

Expresión que nos determina el valor de a en función sólo de datos del problema. Llamando $\beta^2 = v^2/c^2$, tenemos

$$(10.9) \quad a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Para obtener b , bastará substituir el valor de a en (10.8) y resultará

$$(10.10) \quad b = \frac{av}{c} = a\beta = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Substituyendo (10.9) y (10.10) en (10.7), obtendremos, por fin, las ecuaciones de Lorentz que buscábamos

$$(10.11) \quad \begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{\beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{\beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases}$$

válidas para hechos que tienen lugar sobre el eje de las x .

Si consideramos que el sistema O es el que se mueve respecto a O' , la velocidad relativa hemos visto que valía $-v$; por lo que las fórmulas que nos dan x y t en función de x' y t' se obtendrán sólo con cambiar el acento de las letras y el signo de la v , es decir, deberá ser

$$(10.12) \quad \begin{cases} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases}$$

y, efectivamente, por resolución en x y t del sistema (10.11) obtendremos el (10.12).

10.7. Propiedades de las fórmulas de Lorentz. Las fórmulas de Lorentz tienen la propiedad de convertir en un *invariante* la expresión $x^2 - c^2t^2$, es decir, que

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$$

10.8. Espacio de Minkowski. Minkowski se fijó en que las fórmulas de Lorentz-Einstein eran equivalentes a las de transformación de ejes rectangulares de la geometría analítica de cuatro dimensiones con tal que el ángulo de giro fuese imaginario, i.e.

El tiempo equivale a una coordenada espacial, pero imaginaria y el movimiento de translación rectilíneo y uniforme, a un giro estático del sistema coordenado de referencia.

Así en geometría plana la distancia entre dos puntos viene dada por $ds^2 = dx^2 + dy^2$, mientras que en geometría del espacio la distancia se define como $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, análogamente en el espacio de Minkowski la distancia se define como: $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Si un punto se mueve en el espacio con

una velocidad menor a c , se tiene $ds^2 > 0$ y $ds^2 = 0$ si el punto se mueve a la velocidad de la luz. Haciendo $l = ict$, entonces $t = l/ic$. También si $\cos \theta = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ y si $\sin \theta = \sqrt{1-\beta^2}$, entonces

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{vl}{ic} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x + \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}l \\ x' &= x \cos \theta + l \sin \theta \\ l' &= ict' = ic \frac{t - v/cx}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \frac{ict}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ l' &= l \cos \theta - x \sin \theta \end{aligned}$$

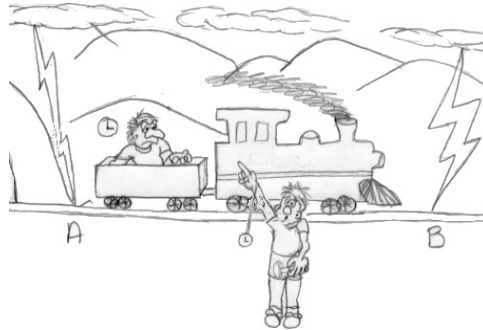
Para mayor claridad a lo expuesto anteriormente, resulta interesante concluir el presente apartado con una cita del propio Einstein:

“Ni el punto espacial ni el instante del tiempo en los cuales ocurre un fenómeno tiene realidad física, sino tan sólo el fenómeno en sí mismo. No existe ninguna relación espacial absoluta, (independiente del espacio de referencia), ni ninguna relación temporal absoluta entre dos sucesos; lo que sí existe es una relación absoluta en el espacio y en el tiempo ... Sin embargo, la indivisibilidad del continuo tetradimensional de los sucesos no implica la equivalencia de las coordenadas espaciales con la temporal; al contrario, debe recordarse que esta última está físicamente definida de modo totalmente distinto de las coordenadas espaciales”

10.9. Consecuencias de la Relatividad Restringida.

10.10. Hechos simultáneos. De las fórmulas de Lorentz se deduce que dos hechos simultáneos para un observador, no lo son para otro que se encuentre en movimiento rectilíneo y uniforme con respecto al primero.

Ejemplo: Un tren de media milla (medido por un observador en el tren), viaja a 100 mi/h. Dos destellos de luz inciden simultáneamente en los extremos del tren para un observador en la tierra. ¿Cuál es la diferencia de tiempo en este acontecimiento para el observador en el tren?



Sean A y B respectivamente la incidencia de los destellos de luz en cada extremo del tren. Utilizando las ecuaciones de Lorentz para el observador en el tren (O'), tenemos

$$t_A - t_B = \frac{(t'_B - t'_A) + v/c^2(x'_B - x'_A)}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$

entonces $t'_B - t'_A = -4.02 \times 10^{-3}$ s. El signo menos indica que el acontecimiento B ocurrió primero que el A (para el observador en el sistema O').

Como conclusión a lo antes expuesto diremos que dos hechos simultáneos para un observador, no lo son para otro que se mueva en relación al primer con velocidad constante.

10.11. **Contracción de Lorentz.** Consideremos una barra a lo largo del eje x' en el sistema O' que se encuentra en movimiento con respecto a O , con una velocidad $v = cte$.

Un observador en O' determina que los extremos de la barra son x'_1 y x'_2 y por lo tanto la longitud de la barra, es decir, su longitud en reposo (o propia) con respecto a O' es

$$L_0 = x'_2 - x'_1$$

Con el fin de encontrar la longitud de la barra medida desde el sistema O (estacionario con respecto a O'), la medición de los extremos de la barra es efectuada en un mismo instante ($\Delta t = 0$). Utilizando las transformaciones de Lorentz:

Como la medición en O se hace en $\Delta t = 0$, i.e. $t_2 - t_1 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \Delta t = t_2 - t_1 &= \frac{t'_2 + v/c^2 x'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{t'_1 + v/c^2 x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{t'_2 - t'_1 + (x'_2 - x'_1)v/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{\Delta t' + L_0 v/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto $\Delta t' + L_0 v/c^2 = 0$, es decir, $\Delta t' = -v/c^2 L_0$

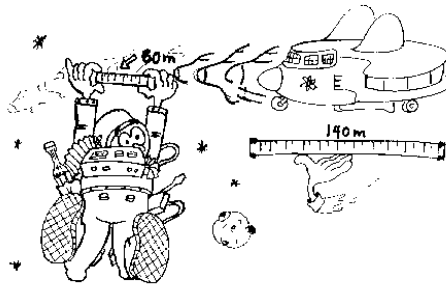
$$\begin{aligned} L = x_2 - x_1 &= \frac{x'_2 + vt'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{L_0 + v\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{L_0 + v(-\frac{v}{c^2})L_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{L_0(1 - \beta^2)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(10.13) \quad \boxed{L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2}}$$

Las longitudes del sistema contrario al del observador que verifica la medida, aparecen, pues, contraídas. La misma fórmula encontraría O' si fuese éste el que realizará la medición, si la barra se encontrará en O .

Ejemplo: Una nave se mueve con respecto a una plataforma espacial con velocidad $.9c$. Si su longitud propia es de 140 m ¿Cuál será la longitud de la nave con respecto a un observador en la plataforma?



$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (140 \text{ m}) \sqrt{1 - (.9)^2} = 61 \text{ m}$$

La contracción de Lorentz es un fenómeno real y no un efecto de óptica como pudiese pensarse (E. Radillo fué el primer ser humano que me lo hizo saber). E.g. Los mesones π son partículas que se crean en la atmósfera superior de la Tierra, su tiempo de vida y la velocidad a la que viajan, es tal que se desintegrarían mucho antes de que tocaran tierra firme. Sin embargo, y a pesar de ésto, si llegan la superficie de la Tierra. ¿Porqué? Bueno es que para los mesones π la distancia que hay entre el momento de su creación y la la superficie terrestre (L_0) no es la misma que la que nosotros medimos (L). Para éstos, dicha distancia L_0 se encuentra en movimiento y por lo tanto sufre la contracción de Lorentz y así la distancia que tienen que recorrer es mucho menor. Si se tratará de un fenómeno de óptica, ésto no podría ser posible.

10.12. Dilatación del tiempo. Consideremos un reloj situado en el sistema O' sobre el eje x' , en digamos el punto x'_k , que se encuentra en movimiento con una velocidad constante v con respecto al sistema O . Un observador en O' (para él, el reloj está en reposo) encuentra que el tiempo marcado por el reloj es t'_1 (en x'_k), un observador en O encontrará que es t_1 . Después de un tiempo t_0 medido por el observador en O' (que se encuentra en movimiento) encontrará que el reloj a marcado t'_2 (de nuevo en x'_k), i.e. $t'_0 = t'_2 - t'_1$. El observador en O , sin embargo, mide que el final del mismo intervalo es t_2 , por lo tanto, para él la duración del intervalo es t , i.e. $t = t_2 - t_1$:

$$t_1 = \frac{t'_1 + v/c^2 x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{1a Observación}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + v/c^2 x'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{2a Observación}$$

$$t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + v/c^2 x'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{t'_1 + v/c^2 x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$t = t_2 - t_1 = \frac{(t'_2 - t'_1) + v/c^2(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{recuerde que } x'_2 - x'_1 = 0$$

Por lo tanto

$$(10.14) \quad \boxed{t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}}$$

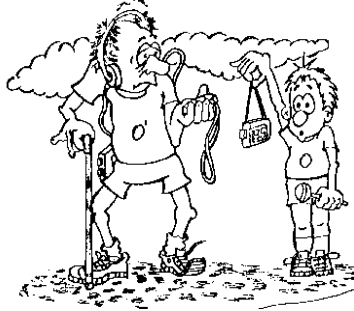
El intervalo de tiempo que para el sistema O' en movimiento es t_0 , para el sistema de referencia O que se encuentra en reposo y ve desplazarse el reloj situado en O' , es t , como $t > t_0$, los relojes del sistema O' aparecerán, pues, que marchan más despacio que los de O . Para los observadores en O' serían los relojes de O los que llevarían la marcha más lenta, pues la fórmula (10.14) puede ser deducida también por los observadores de O' , ya que para estos observadores, son los de O que se encuentran en movimiento con respecto a ellos.

Ejemplo: Un observador O' que se mueve con una velocidad de $.99c$ respecto a una plataforma espacial, viaja hacia una estrella que se encuentra a 35 años luz de distancia de la plataforma. Tan pronto llega a la estrella, le da la vuelta y emprende su viaje de regreso a la misma velocidad. Compare la edad de O' a su llegada a la plataforma con la de su hermano gemelo O , quién permaneció en ella. Para O la duración del viaje es: $t = \text{distancia}/\text{velocidad} = (35 \text{ años luz} \times \text{distancia que recorre la luz en un año})/(.99 \times \text{velocidad de la luz}) = 35 \text{ años}$. Puesto que el viaje es de ida y de regreso, el tiempo transcurrido es $t = 70 \text{ años}$. Para O' el intervalo de tiempo propio entre la salida de la plataforma y su llegada a la estrella es,

$$t_0 = (t) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (70) \sqrt{1 - .99^2} = 9.87 \text{ años} \approx 10 \text{ años}$$

Por lo que, a su encuentro, O' está ≈ 60 años más joven que O .

Según lo que discutimos en la sección de dilatación del tiempo, nos encontramos con una paradoja, a la cual se le conoce como *paradoja de los gemelos*. Esta consiste en que a pesar de lo que se discutió anteriormente (de que los relojes del sistema contrario al que realiza las mediciones marcharán más lentamente), solo uno - O' - es el observador que sufre los efectos de la dilatación del tiempo y no su hermano gemelo O que se encuentra en la plataforma. La razón de esto fué que solamente O' sintió aceleraciones debido al viaje (partida de la plataforma, vuelta a la estrella y llegada a la plataforma) mientras que O no. Por ésto el fenómeno de dilatación sólo es aplicable al observador no inercial (sistema en mov. acelerado), en este caso O' .



Sabemos que debido al movimiento de O' con respecto a O , este último observa que O' sufre los efectos de la contracción de Lorentz y la dilatación del tiempo, sin embargo cuando llega O' a la plataforma, éste recupera su longitud normal, pero en cuanto al tiempo, O' es más joven que O , ¿Porqué? Bueno la razón es que a pesar de que O' llega a la plataforma y tanto el tiempo medido por sus relojes como las medidas de la nave vuelven a ser las mismas que al partir, sus relojes acumularon un atraso de tiempo que no se puede recuperar, ya que lo único que ahora esta pasando es que sus relojes estan marchando igual que los de O . (es algo asi como si tuviese dos relojes de baterias, uno de ellos comienza a caminar más lentamente porque sus baterias se comienzan a descargar, mientras que el otro camina normalmente. Cuando coloco baterias nuevas en el reloj, este comienza a caminar al ritmo que lo hace el otro, sin embargo, el atraso que sufrió no se puede recuperar por el solo hecho de ponerle las baterias nuevas.)

¿Qué hubiera pasado si tanto O y O' se mueven uno con respecto al otro con velocidad constante y justo en el momento que se cruzan se detienen? Bueno, mientras se van moviendo tanto O como O' miden que el reloj del otro marcha más lento, a medida que se van deteniendo, los relojes tanto para uno como para el otro comienzan a sincronizarse de nuevo (las manecillas de ambos relojes comienzan a moverse a la misma velocidad), y al final los dos han envejecido lo mismo.

10.13. Efecto Doppler relativista. A continuación obtendremos la ecuación para calcular el cambio de frecuencia relativista debido al efecto doppler, es decir, la variación de la frecuencia debido al movimiento relativo del observador con respecto a la fuente o emisor de ondas (en este caso son ondas que se mueven con una velocidad igual a c). Para ésto, llamaremos ν_0 a la frecuencia medida por un observador que se encuentra en reposo con respecto a la fuente de ondas (sistema O') y ν a la frecuencia medida por otro observador en algún sistema de referencia inercial con respecto al primero (sistema O). Estos observadores poseen dispositivos que hacen "click" cada vez que se reciba un pico de una onda, de tal forma, que el tiempo entre "clicks" nos indicará el tiempo que hay entre onda y onda. Podemos indentificar tres situaciones:

- El observador en O , se mueve perpendicularmente con velocidad v , es decir, transversalmente a la dirección de las ondas. En este caso, el tiempo medido por este observador entre clicks, es simplemente t , entonces, la frecuencia será $\nu = 1/t$, por lo tanto,

$$\nu = \frac{1}{t} = 1/\left\{\frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right\}$$

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{t_0}$$

por lo tanto,

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

- El observador en O , se aleja de la fuente de ondas con una velocidad v . En este caso la distancia que el observador recorre es $d = vt$, por lo que la onda que viaja a una velocidad c hacia él tendrá que consumir más tiempo en alcanzarlo, es decir, no en un tiempo t solamente, sino en un tiempo, $T = t + d/c = t + vt/c$, entonces,

$$\begin{aligned} T &= t + vt/c \\ T &= \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{t_0 v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ T &= t_0 \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ T &= t_0 \frac{\sqrt{1 + v/c} \sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{(1 - v/c)(1 + v/c)}} \\ T &= t_0 \frac{\sqrt{1 + v/c} \sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{1 - v/c} \sqrt{1 + v/c}} \\ T &= t_0 \frac{\sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{1 - v/c}} \\ \nu &= \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{1 - v/c}}{t_0 \sqrt{1 + v/c}} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

- El observador en O , se acerca a la fuente de ondas con una velocidad v . En este caso la distancia que el observador recorre es $d = vt$, por lo que la onda que viaja a una velocidad c hacia él, tendrá que consumir menos tiempo en alcanzarlo, es decir, no en un tiempo t , sino en un tiempo, $T = t - d/c = t - vt/c$, entonces,

$$\begin{aligned} T &= t - vt/c \\ T &= \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{t_0 v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ T &= t_0 \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ T &= t_0 \frac{\sqrt{1 - v/c} \sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{(1 - v/c)(1 + v/c)}} \\ T &= t_0 \frac{\sqrt{1 - v/c} \sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 - v/c} \sqrt{1 + v/c}} = t_0 \frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}} \\ \nu &= \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{1 + v/c}}{t_0 \sqrt{1 - v/c}} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

Ejemplo 10.1. Suponga que en el problema de la dilatación del tiempo, los observadores en O y en O' se ponen de acuerdo para mandarse señales de radio una vez cada año. ¿Cuántas señales de radio reciben cada uno?

Resolveremos el problema utilizando las fórmulas del efecto Doppler que acabamos de encontrar.

En el viaje hacia la estrella, el observador en O' se separa de O a un ritmo de $.99c$, por lo que el tiempo entre cada señal que recibe de O es t , ya que para éste, es O el que se aleja de él, luego $t_0 = 1$ año, será el tiempo entre cada señal que O manda, entonces,

$$\begin{aligned} \nu &= \nu_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \\ t_{ida} &= t_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \\ t_{ida} &= (1 \text{ año}) \sqrt{\frac{1 + .99c/c}{1 - .99c/c}} \\ t_{ida} &= 14.11 \text{ años} \end{aligned}$$

Ahora, en el viaje de regreso, el tiempo entre señales que O' recibe de O es t dada por

$$\begin{aligned} \nu &= \nu_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \\ t_{regreso} &= t_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \\ t_{regreso} &= (1 \text{ año}) \sqrt{\frac{1 - .99c/c}{1 + .99c/c}} \\ t_{regreso} &= 0.07 \text{ años} \end{aligned}$$

Para el observador en O' donde el tiempo entre clicks es t (ya que éstos fueron producidos por un sistema en movimiento O , desde el punto de vista de O'), el viaje hacia la estrella toma 4.94 años y recibe de O , $4.94/(14.11) = 0.40$ clicks. Para O' el viaje de regreso tarda otros 4.94 años y recibe de O $4.94/(0.07) = 69.6$ señales. Es decir 70 en total. De esto O' deduce que para O han transcurrido 70 años desde que partió de la Tierra.

Ahora, para O la situación del cálculo es similar, pues para él, es O' el que se mueve y entonces el tiempo entre clicks que O mide es t (ya que éstos fueron producidos por un sistema en movimiento O' , desde el punto de vista de O), Según los cálculos de O , el tiempo que tarda O' para llegar a la estrella es tiempo $= \frac{d}{v} = \frac{35 \text{ años luz}}{.99c} = 35.35$ años por lo que el número de clicks que recibe de O' en el viaje de ida es $35.35/14.11 = 2.50$, mientras que el mismo número pero en el viaje de regreso es $35.35/.07 =$

10.14. Transformaciones relativistas de la velocidad. Un sistema de referencia O' se mueve a lo largo del eje común $x - x'$ a velocidad constante v respecto a un segundo sistema de referencia O . Las componentes de la velocidad ω_T de una partícula, medidas por O' son (ω'_x, ω'_y) y por O son (ω_x, ω_y) y valen

$$\omega_x = \frac{x}{t} = \frac{(x' + vt')/\sqrt{1 - \beta^2}}{(t' + \frac{v}{c^2}x')/\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x' + vt'}{t' + \frac{v}{c^2}x'} = \frac{\frac{x'}{t'} + v}{\frac{t'}{t'} + \frac{v}{c^2}\frac{x'}{t'}} = \frac{\omega'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}\omega'_x}$$

$$\omega_y = \frac{y}{t} = \frac{y'}{(t' + \frac{v}{c^2}x')/\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{y'\sqrt{1-\beta^2}}{t' + \frac{v}{c^2}x'} = \frac{\frac{y'}{t'}\sqrt{1-\beta^2}}{\frac{t'}{t'} + \frac{v}{c^2}\frac{x'}{t'}} = \frac{\omega'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2}\omega'_x}$$

Si la partícula se moviera exclusivamente en la dirección y' entonces $\omega_T = \omega'_y$ y $\omega'_x = 0$, y

$$(10.15) \quad \omega_y = \omega'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Ejemplo: Suponga que un observador O se encuentra en reposo con respecto a un observador en otro sistema de referencia O' el cual puede ser una nave imaginaria la cual se mueve a una velocidad $v = c$. Si el piloto de la nave decide encender los faros delanteros de dicha nave, los fotones emitidos se mueven con una velocidad igual a c . Para un observador en O' , la velocidad de los fotones es c , según la fórmula de adición de velocidades de Galileo, la velocidad observada desde el sistema O debe ser

$$\omega_x = \omega'_x + v = c + c = 2c$$

que viola el postulado de la constancia de la velocidad de la luz para cualquier observador inercial (en este caso O mide para los fotones una velocidad no igual a c , sino a $2c$). Sin embargo, utilizando la fórmula de adición de velocidades de la relatividad (transformación relativista de la velocidad), tenemos

$$\omega_x = \frac{\omega'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}\omega'_x} = \frac{c + c}{1 + \frac{c}{c^2}c} = \frac{2c}{2} = c$$

Valor que concuerda con el postulado de la constancia de la velocidad para cualquier observador inercial.

10.15. Variación de la masa. Consideremos un experimento de balística, donde un observador, por ejemplo O' , dispara un proyectil en la dirección del eje y' . El proyectil penetra en un bloque que permanece inmóvil respecto al observador O' ($\Delta x' = 0$ pues $x'_2 = x'_1 = x'_k$). Es lógico suponer que la cantidad de proyectil que penetra en el bloque pueda determinarse a partir de la componente en y' del momentum del proyectil dado por

$$p' = m_0\omega'_y$$

Donde m_0 es la masa del proyectil medida por O' (O' observa que el proyectil tiene una velocidad $\omega'_x = 0$ pues el proyectil se mueve en la dirección y' . Y desde ese punto de vista la masa del proyectil está en reposo para el observador O' que esta situado en el eje x' en la coordenada x'_k).

Ahora, considerando el mismo experimento desde el punto de vista de O , para quién O' (y por lo tanto el proyectil también) se mueve con una velocidad constante v a lo largo del eje común $x - x'$. Puesto que el orificio dejado por el proyectil forma un ángulo recto con la dirección del movimiento relativo, O y O' estarán de acuerdo en cuanto el valor de la distancia que el proyectil penetra en el bloque (para O esa distancia no sufre la contracción de Lorentz) y, por lo tanto, esperan que el valor de la componente en y del momentum del proyectil sea el mismo para ambos.

El momentum medido por O es

$$p = m\omega_y$$

donde m es la masa medida por O . Teniendo en cuenta que $\omega'_x = 0$ y usando la ecuación (10.15) tenemos

$$(10.16) \quad \begin{aligned} p_y &= p'_y \\ m\omega_y &= m_0\omega'_y \\ m\omega'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} &= m_0\omega'_y \end{aligned}$$

Se observa que el momentum medido por O y por O' no es igual si la masa m y m_0 son iguales. O suponemos que los principios del momentum, en particular su conservación no se cumplen a grandes velocidades o buscamos la forma de definir el momentum de un cuerpo, con el fin de que los principios sobre momentum sean aplicables a la relatividad especial. Esta última alternativa fué la seleccionada por Einstein: “Para

todos los observadores son válidos los principios de momentum, si la masa de un cuerpo varía de acuerdo con

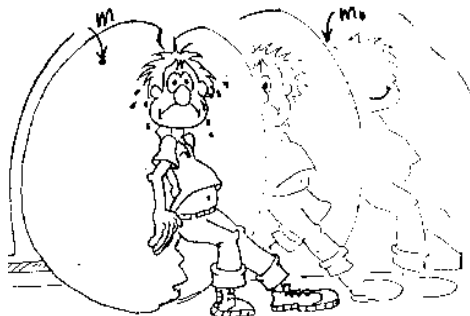
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

es decir eliminado el factor común ω'_y de la ecuación (10.16). **Ejemplo:** La masa en reposo de un mesón μ es de 207 veces la masa en reposo del electrón, ¿Cuál será la masa para un observador en el laboratorio, para quien el mesón μ se mueve a una velocidad $.8c$?

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{(207)(9.11 \times 10^{-31} \text{ Kg})}{\sqrt{1 - .8^2}} = 3143 \times 10^{-31} \text{ Kg}$$

es decir, 345 veces la masa del electrón. Lo que significa que la masa del mesón vista en movimiento por un observador en el laboratorio es mayor que la masa de la misma partícula en reposo.

Cabe aclarar aquí que el mesón en si mismo no ha cambiado nada, si un observador se moviera a la velocidad del mesón, éste encontraría que el mesón se encuentra en reposo y que su masa es 207 veces la masa en reposo del electrón (ésto se puede explicar, diciendo que la energía cinética de cuerpo se suma como masa, a la masa que ya posee el cuerpo en reposo. Ver la subsección siguiente).



10.16. Equivalencia entre masa y energía. Si consideramos la masa de un cuerpo constante, encontraremos la expresión clásica para la energía ciética, es decir, del teorema de energía-trabajo (teorema de la variación de la energía) tenemos

$$W = \Delta E_k = \int_0^s \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^s \frac{d(m\vec{v})}{dt} \cdot d\vec{s} = m \int_0^v \frac{d\vec{s}}{dt} \cdot \vec{v} = \int_0^v \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} m\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m v^2$$

Ahora según lo encontrado relativo a la variación de la masa debido a su velocidad, tenemos

$$\left(\beta = \frac{v}{c}, m = m_0 / \sqrt{1 - \beta^2} \text{ y } dm = m_0 v / c^2 (1 - \beta^2)^{-3/2} dv\right)$$

$$\begin{aligned} W = \Delta E_k &= \int_0^s \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^s \frac{d(m\vec{v})}{dt} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_0^v \frac{ds}{dt} d(mv) = \int_0^v v(m dv + v dm) = \int_0^v (mv dv + v^2 dm) \\ &= \int_0^v \left\{ \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{m_0 v^3 / c^2 dv}{\sqrt{(1 - \beta^2)^3}} \right\} \\ &= \int_0^v \frac{(1 - \beta^2)m_0 v dv + m_0 \beta^2 dv}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \int_0^v \frac{m_0 v - m_0 v^3 / c^2 + m_0 v^3 / c^2}{(1 - \beta^2)^{3/2}} dv = \int_0^v \frac{m_0 v}{(1 - \beta^2)^{3/2}} dv \\ &= -\frac{1}{2} m_0 c^2 \int_0^v \frac{-2/c^2 v}{(1 - \beta^2)^{3/2}} dv = -\frac{1}{2} m_0 c^2 \int_0^{z(v)} \frac{dz}{z^{3/2}} = m_0 c^2 z^{-1/2} \Big|_0^{z(v)} \\ &\text{(donde } z = 1 - \beta^2, \text{ y } dz = -2/c^2 v dv) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m_0 c^2 \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \Big|_0^v = m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} - 1 \right\} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0 c^2 \\
&= m c^2 - m_0 c^2
\end{aligned}$$

es decir, la energía de una partícula en movimiento (energía cinética) viene dada por $\Delta E_k = m c^2 - m_0 c^2$. Ahora un hecho interesante es que el resultado involucra una resta de dos cantidades, es decir, que la fórmula que encontramos para calcular la energía cinética nos dice que para obtener ésta, hay que eliminar antes una energía igual a $m_0 c^2$, es decir, una energía en reposo. Esto es bastante significativo ya que lo que significa es que el cuerpo posee ya de antemano (antes de ponerse en movimiento) una energía intrínseca dada por

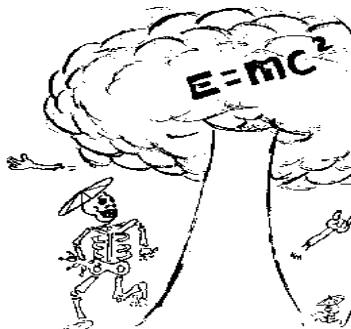
$$E_0 = m_0 c^2$$

Donde E_0 indica que es una energía que posee un cuerpo en reposo.

Ejemplo: En la fisión del Uranio 235, U_{235} , por ejemplo en 1 Kg tan solo 1 gr es convertido en energía, que vale

$$E_0 = m_0 c^2 = (1 \times 10^{-3} \text{ kg})(2.99 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 8.94 \times 10^{13} \text{ J} = 5.58 \times 10^{32} \text{ ev}$$

Que es una energía equivalente a la utilización de aprox. 20,000 toneladas de TNT.



11. LA MANZANA DE NEWTON..

O COMO SE DESCUBRIÓ LA LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL [16]

Newton llegó al concepto de la gravitación universal en los años 1684-1685, durante la preparación de los Principia.

11.1. Introducción. A continuación un documento sumamente interesante que encontré en una de esas revistas de Física que nadie lee y que se encuentran en las bibliotecas en el estante de más arriba que nadie ve y llenas de polvo y con el motivo de hacer creer a los estudiantes que hay mucho material en ella.

Según una leyenda bien conocida, estaba Isaac Newton sentado debajo de un manzano, cavilando sobre la fuerza que mantiene unida la Luna a la Tierra, cuando vio caer una manzana.

Este suceso le permitió descubrir que la fuerza que atrae a la manzana es la misma que actúa sobre la Luna, y así descubrió el principio de la gravitación universal.

Sin embargo, esta leyenda no resiste un examen crítico. El descubrimiento de la gravitación universal no se debió a un instante de inspiración genial, sino a una exhaustiva labor de investigación basada en conocimientos matemáticos que sólo Newton poseía en el siglo XVII.

Así mismo, no pueden despreciarse del todo las contribuciones de otros científicos, anteriores o contemporáneos de Newton; darles el crédito que merecen, lejos de aminorar la obra de Newton, da un punto de referencia a partir del cual juzgarla.

La manzana de Newton, al igual que el baño de Arquímedes, ha contribuido a fomentar la idea de que los grandes descubrimientos científicos se dan casualmente, en un destello de genialidad. A muchos investigadores les gustaría esperar cómodamente a su musa debajo de un manzano o en una tina de baño. Sin embargo, una versión más apegada a la verdad de lo que fue uno de los descubrimientos científicos más importantes de la historia nos puede ayudar a comprender en términos más justos cómo se da el progreso

científico.

Hablar de la gravitación universal implica hablar de Isaac Newton, así que una buena parte de este ensayo versará sobre este científico. No intentaremos hacer una biografía de él, pero sí trataremos de señalar algunos rasgos característicos de su peculiar personalidad. Pero antes hablemos de sus predecesores.

11.2. De Aristoteles a Hooke. Primero es necesario enfatizar que, hasta antes de Newton, nunca se pensó que pudiera existir alguna relación entre la atracción gravitacional y el movimiento de los planetas. Así, Aristóteles, considerado la máxima autoridad científica durante la Edad media, distinguió claramente entre los fenómenos terrestres y los celestes. Para Aristóteles, la gravitación era una tendencia de los cuerpos terrestres a ocupar su “lugar natural,” que es el centro de la Tierra. Es evidente que, dentro de este esquema, la gravitación es un fenómeno puramente terrestre y que no puede haber atracción gravitacional entre la Tierra y un cuerpo celeste, pues no hay ninguna afinidad entre ellos. Muy distinto es el problema del movimiento de los astros; este movimiento lo explicaba Aristóteles por medio de esferas trasparentes que supuestamente sostienen a los planetas, al Sol, a la Luna y a las estrellas.

Como se sabe, el primer golpe al sistema aristotélico lo asestó Copérnico; la revolución copernicana marca el inicio de la nueva ciencia. Sin entrar en detalles para no desviarnos del tema de este artículo, señalaremos que Copérnico, si bien describió correctamente el movimiento de los planetas, nunca intentó explicarlo por medio de algún mecanismo físico.

El modelo de Copérnico fue definido por Galileo con múltiples argumentos. El mismo Galileo estudió detenidamente la caída de los cuerpos, pero nunca sospechó que hubiera una relación entre este problema y el movimiento de los planetas. Galileo creía que la gravitación es una fuerza estrictamente constante (homogeneidad del espacio) y su explicación de este fenómeno no iba más allá de la de Aristóteles. Por otra parte, sostenía que los planetas se mueven en círculos debido a que el movimiento circular es homogéneo en todo punto y que, por lo tanto, es el único estable. Este concepto de la supuesta perfección del movimiento circular había de subsistir hasta los tiempos de Newton.

Kepler, después de descubrir sus famosas tres leyes, elaboró una teoría para explicar el movimiento de los planetas. Desgraciadamente, su teoría estaba plagada de errores, pero vale la pena describirla pues tuvo bastante aceptación en su época y es un buen punto de referencia para juzgar la aportación newtoniana. Kepler notó que la velocidad de un planeta en el afelio y en el perihelio varía en relación inversa a la distancia al Sol (hoy en día, sabemos que esto se debe a la conservación del momento angular $L = mrV_\phi$); de aquí dedujo, erróneamente, que la velocidad total satisface la misma relación. Ahora bien, según Aristóteles, se necesita aplicar cierta fuerza a un cuerpo para mantener su velocidad constante (sabemos ahora que esto se debe a la fricción). Siguiendo este concepto aristotélico, Kepler dedujo que debería haber en el espacio una fuerza motriz cuya intensidad varía en relación inversa a la distancia al Sol (nótese otro error fundamental: el momento angular es constante para cada planeta por separado). Kepler supuso que la fuerza que mueve los planetas emana del Sol y sugirió que era una fuerza magnética o casi-magnética, aunque nunca precisó qué entendía por eso.

El siguiente intento de explicar el movimiento de los planetas vino de Descartes, quien supuso la teoría de los torbellinos etéreos. Según la teoría el cosmos está lleno de una sutil sustancia, el éter, casi intangible, la materia común es de una condensación de este éter. El movimiento de los planetas se debe que alrededor del Sol existen enormes torbellinos de éter que arrastran a los planetas, tal como un remolino arrastra un corcho. Los torbellinos cartesianos estuvieron muy en boga durante el siglo XVII, hasta que Newton asestó un golpe mortal en el libro II de los Principia.

Hasta antes de que se conociera el sistema newtoniano, el intento más próximo a la realidad que hubo para explicar el movimiento planetario fue el de Robert Hooke. Este científico inglés, sin duda el físico experimental más importante de su siglo, curador de experimentos de la Royal Society, hizo innumerables contribuciones a la ciencia. Pero la historia ha sido injusta con él: la mayor desgracia de Hooke fue ser contemporáneo de Newton y ver su fama eclipsada por la de su terrible rival.

Hooke se interesó en muchísimos temas científicos, siempre proponiendo ideas originales y vislumbrando la solución correcta de muchos problemas. Sin embargo, su misma versatilidad le impidió profundizar en los trabajos que realizaba. Hooke siempre veía con amargura cómo otros se adjudicaban la fama de desarrollar

las ideas que él sólo había podido esbozar. El caso de la gravitación fue típico.

Hooke publicó en 1674, doce años antes de la aparición de los Principia, un libro intitulado “An Attempt to Prove the Motion of the Earth by Observations” en el que, por primera vez, se planteaba correctamente el problema del movimiento planetario. Sus suposiciones eran:

... First, that all celestial bodies whatsoever, have an attraction or gravitating power towards their own centers, whereby from flying from them, as we may observe the earth to do, but that they do, but that they do also attract all other celestial bodies that are within the sphere of their activity...

The second supposition is this. That all bodies whatsoever that are put into direct and simple motion will so continue to move forward in a straight line, till they are by some other effectual powers deflected and bent into motion, describing a circle, ellipsis, or some other more compounded curve line.

The third supposition is, that these attractive powers are so much the more powerful in operating, by how much the nearer the body wrought upon is to their own centers. Now that these several degrees are i have not yet experimentally verified...

Nótese cómo Hooke intuye el fenómeno gravitacional, además de adelantarse a la primera ley de Newton. Pero Hooke no habla de fuerzas centrífugas y su descripción de la fuerza de atracción no pasa de ser cualitativa. Con todo lo que tiene de profético su planteamiento, Hooke nunca pudo profundizar más en el problema. De ahí a un sistema bien fundamentado, cuantitativo y basado en el rigor matemático hay un larguísimo trecho que sólo un hombre en aquella época, Newton, podía recorrer.

11.3. Isaac Newton. Newton nació en 1642 en una aldea llamada Woolsthorpe, en el Lincolnshire. Su padre, un rico granjero, murió antes de que naciera su ilustre vástago; su madre se volvió a casar después, dejándolo al cuidado de sus abuelos. A los quince años, Newton ingresó a la escuela pública de Grantham, cerca de su aldea. Quizás lo único que vale la pena mencionar de aquella época es que el joven Issac demostró tener una sorprendente habilidad manual para construir toda clase de artefactos.

A los dieciocho años fue admitido en el Trinity College de Cambridge. Ahí habría de pasar los próximos 35 años de su vida: los primeros siete en calidad de estudiante, hasta obtener el grado de Maestro en Artes: el resto del tiempo como “fellow” y profesor lucasiano de matemáticas.

Newton fue hombre con una prodigiosa capacidad de trabajo. Cuando estaba absorto en un tema, se olvidaba hasta de dormir o de comer. Nunca llegó a casarse y fue de trato muy difícil. Contra lo que podría pensarse, la física y las matemáticas ocuparon sólo parte de su actividad intelectual. Newton se interesó principalmente en la alquimia y en la teología. Para Newton, un hombre extrañamente místico, el objeto de la investigación científica era comprender la obra de Dios y entrar, así, en una especie de comunicación con El. Newton dejó a su muerte una cantidad impresionante de manuscritos que versaban sobre muy diversos temas: física, matemáticas, experimentos de alquimia, tratados teológicos, estudios históricos, etc., etc. Lo impresionante es que rara vez intentó durante su vida publicar algo de todo lo que escribió, y si accedió a hacer pública una pequeña parte de sus escritos fue casi siempre bajo presiones o estímulos externos.

En 1665, cuando Newton era estudiante de Cambridge, una epidemia de peste asoló Inglaterra. En aquella época se había descubierto empíricamente que la enfermedad se propagaba más rápidamente en los lugares densamente poblados; así que, al presentarse una epidemia, se evacuaban las ciudades y se dispersaba a la gente por el campo. Fue de ese modo como Cambridge permaneció cerrado durante casi dos años, tiempo que Newton pasó en su aldea natal. Ahí, alejado del mundanal ruido, inició su vida científica. Según la historia aceptada comúnmente, fue durante el llamado “annus mirabilis” de 1666 cuando el joven de 24 años inventó el método de las fluxiones (el cálculo diferencial e integral), descubrió la composición de la luz blanca (primer paso hacia una ciencia óptica) y, finalmente, encontró la ley de la gravitación universal.

Se han conservado numerosos manuscritos de Newton que demuestran, sin lugar a dudas, que ya había desarrollado el método de las fluxiones en aquella época, llegando a demostrar el teorema fundamental del cálculo (la derivación y la integración son operaciones inversas). Sin embargo, guardó para sí y nunca publicó lo que fue uno de los descubrimientos matemáticos más importantes de la historia. Sólo después de cuarenta años desempolvó Newton sus manuscritos en aquel famoso pleito con Leibnitz sobre la prioridad del cálculo diferencial e integral.

También se tienen evidencias de que efectivamente Newton inició en aquella época sus experimentos con

prismas y descubrió la descomposición de la luz.

El tema del descubrimiento de la gravitación universal lo trataremos en la siguiente sección.

A su regreso a Cambridge, Newton prosiguió con sus estudios sobre matemáticas y óptica. En 1671 construyó, con sus propios medios, un telescopio reflector que obsequió a la Royal Society, en aquel entonces una encipiente sociedad dedicada a la nueva ciencia. La acogida que tuvo el instrumento fue sumamente entusiasta y se decidió inmediatamente a aceptar a Newton como miembro de la sociedad. Animado, Newton decidió mandar una segunda obra suya a la Royal Society: el famoso tratado sobre la naturaleza de la luz, fruto de sus experimentos con prismas. Esta vez, la acogida al trabajo fue decepcionante: Hooke y otros atacaron ferozmente la teoría de Newton, que contradecía sus propias teorías. Este incidente marca el principio de la enemistad entre Hooke y Newton. Si bien hubo un intento de reconciliación en 1676, la tregua duraría sólo hasta la publicación de los “Principia”, como veremos más adelante.

11.4. La Manzana y la Luna. Veamos ahora, con más detalle, el supuesto descubrimiento de la gravitación universal que hizo Newton en 1666, sentado debajo de un manzano. Al parecer, la historia de la manzana la narró el mismo Newton, poco antes de su muerte a los 85 años. En palabras de Conduitt, su sobrino político, quien intentó escribir una biografía de su ilustre tío:

In the year 1666, he retired again from Cambridge... to his mother in Lincolnshire and whilst he was musing in a garden it came into his thought that the power of gravity (which brought an apple from the tree to the ground) was not limited a certain distance from the earth but that this power must extend much farther than was usually thought. Why not as high as the moon said he to himself and if so that must influence her motion and perhaps retain her in her orbit...

La manzana también aparece en las “Lettres Philosophiques” de Voltaire, quien conoció a la sobrina de Newton durante una estancia en Inglaterra.

Según Conduitt, Newton habría hecho el siguiente razonamiento: conociendo la aceleración centrífuga de la Luna, que debe ser igual en magnitud a la aceleración gravitacional de la tierra a esa distancia, compárese ésta con la aceleración gravitacional en la superficie de la tierra; si una ley del cuadrado inverso es válida, la razón entre las aceleraciones debe ser igual a la razón al cuadrado de radio terrestre y del radio de la órbita lunar. Sin embargo, según Conduitt, Newton desconocía el valor exacto del radio terrestre y sus cálculos no daban resultados correctos. Por ello los habría puesto de lado y sería sólo veinte después, justo antes de escribir los “Principia”, cuando Newton habría rehecho los cálculos, usando un valor más exacto para el radio terrestre, y descubrió que su teoría era correcta.

Hasta hace varios años, ésta era la explicación aceptada de por qué Newton tardó veinte años, desde el “annus mirabilis” de 1666 hasta la publicación de los “Principia” en 1686, para anunciar su descubrimiento de la gravitación universal. Sin embargo, se ha demostrado que Newton conocía el valor correcto del radio terrestre, si no en 1666, poco después; inclusive llegó a editar personalmente la “Geografía” de Varenus en 1672, en donde le valor correcto está dado. Entonces, otra vez: ¿por qué tardó Newton veinte años en anunciar su descubrimiento? Quizás porque no le satisfacía enteramente su teoría, pues no era obvio por qué un objeto tan grande como la Tierra puede atraer exactamente hacia su centro según una ley del cuadrado inverso. Sería muchos años después cuando Newton lograría demostrar que una esfera atrae gravitacionalmente como si toda su masa estuviera concentrada en su centro.

Veamos ahora la versión moderna de esta historia, basada en los manuscritos de Newton que se han estudiado recientemente. En primer lugar hay que señalar que la fórmula para la aceleración centrífuga ($a = v^2/r$) fue publicada por primera vez en 1673 por Huygens; pero Newton ya la había descubierto independientemente en 1665 (aunque, por supuesto, nunca lo hizo público): se conserva un manuscrito que así lo confirma. Nótese que esta fórmula es fundamental para deducir una ley del cuadrado inverso: en efecto, según la tercera ley de Kepler $p^2 \propto r^3$ y como la velocidad es $v = 2\pi r/P$ y, por lo tanto, la aceleración centrífuga es $a = (2\pi)^2 r/P^2$ resulta que $a \propto 1/r^2$.

Existe un manuscrito de Newton, de alrededor de 1669, en el que utiliza su fórmula de aceleración centrífuga para atacar varios problemas. Primero, Newton calcula la aceleración centrífuga en la superficie de la tierra y la compara con la aceleración gravitacional. Esto viene al caso por que una objeción de los aristotélicos en contra del sistema heliocéntrico era que la rotación de la tierra arrojaría al espacio los objetos que

se encuentren en la superficie. Newton demostró que esa aceleración es despreciable con respecto a la gravitacional. Después, Newton calculó la aceleración centrífuga de la Luna y la comparó con la aceleración centrífuga en el ecuador terrestre y con la aceleración gravitacional en la superficie de la Tierra. Finalmente, calculó la aceleración centrífuga de los planetas al girar alrededor del Sol.

Se podría pensar a primera vista que Newton ya estaba intuyendo la atracción gravitacional, pero un examen minucioso del manuscrito revela lo contrario. En ningún momento habla Newton de una fuerza que “atraiga” los planetas al Sol o la Luna a la Tierra; se conforma con sólo calcular sus aceleraciones centrífugas. Pero sería absurdo no considerar alguna fuerza de atracción que compense la aceleración centrífuga para mantener los cuerpos celestes en sus órbitas. Obviamente Newton pensó en ese problema, pero si no lo menciona en su manuscrito es por que desconocía la naturaleza de tal fuerza. En otros manuscritos de esa época, llegó incluso a considerar los torbellinos de Descartes. Estamos aún muy lejos del concepto de la gravitación universal.

Más aún, en 1675, en un artículo intitulado “Hypothesis Explaining the Properties of Light,” Newton desarrolla una teoría para explicar la gravitación en términos de condensaciones del éter. Una lectura cuidadosa demuestra que su teoría es incompatible con una gravitación universal.

11.5. La Correspondencia Hooke-Newton. En 1679, Hooke fue electo secretario de la Royal Society. A fines de ese año, en su calidad de secretario, escribió una amabilísima carta en la que le invitaba a reanudar su correspondencia con la Royal Society. Así mismo Hooke pedía a Newton su opinión sobre su teoría del movimiento planetario (la misma que citamos en la sección II).

Newton no tardó en contestar. Se disculpó con Hooke por no tener material que mandarle, ya que, alegó, hace tiempo que había abandonado a la filosofía natural (“...*Having thus shook hands with Philosophy, and being also at present taken of with other bussiness,...*”). Así mismo declaró desconocer la teoría de Hooke (Lo cual no parece ser cierto) y, por lo tanto, no poder opinar sobre ella. Sin embargo, quizás por cortesía, Newton propuso a Hooke un experimento que había ideado para demostrar el movimiento de la tierra (“...*a fancy of my own about discovering the earth’s diurnal motion*”). Si se tira un proyectil desde lo alto una torre, éste debe tener una velocidad horizontal ligeramente mayor que en el suelo debido a la rotación de la tierra; por lo tanto, el proyectil no caería verticalmente sino un poco hacia el Este. En su carta, Newton describe la trayectoria del proyectil como una espiral que termina en el centro de la tierra, aunque no está nada obvio en su carta qué entiende por esa trayectoria “dentro” de la Tierra. Quizás estaba pensando inconscientemente en el “lugar natural” de los cuerpos según Aristóteles.

Hooke tomó muy en serio el experimento propuesto por Newton y leyó su carta es una sesión de la Royal Society. Pero, atrevimiento imperdonable, se permitió señalar una falla en el razonamiento de Newton y corregirla en público. En su respuesta a Newton del 28 de diciembre de 1679, Hooke le aclara que un proyectil que cae a través de la Tierra sin resistencia (suponiendo que el planeta se hubiera rebanado en dos) no describiría una espiral, como cree Newton, sino una especie de elipsoide AFGH, pero si hubiera resistencia, la curva sería una espiral AIKLMNOPC. Más aún, lo anterior sería cierto para un proyectil lanzado desde el ecuador, pero si el experimento se realiza en una latitud como la de Londres, el proyectil debería caer al sureste de la perpendicular y no al este, como cree Newton.

La carta de Hooke desagradó profundamente a Newton, como él mismo lo narraría años después. De todos modos, se tomó la molestia de contestarla:

I agree with you that the body in our latitude will fall more to the south than than east if the height it falls from be any thing great. And also that if its gravity be supposed uniform it will not descend in a spiral to the very center but circulate with an alternate ascent and descent made by its vis centrifuga and gravity alternately overballancing one another. Yet I imagine the body will not describe an Ellipsoeid but rather such a figure as is represented by AFOGHJKL,...

Nótese cómo Newton supone que la fuerza gravitacional en el interior de la Tierra es constante. Esto permite a Hooke corregirlo una vez más: en su tercer carta, leemos lo que es el pasaje más significativo en toda la correspondencia:

Your calculation of the curve by a body attracted by an aequall power at all distances from the center such as that of a ball roulng in a inverted concave cone is right and the two auges (apsides) will not unite by about

a third of a revolution. But my supposition is that the attraction always is in a duplicate proportion to the distance from the center reciprocally, and consequently that the velocity will be in a subduplicate proportion to the attraction and consequently as Kepler supposes reciprocally to the distance.

Es muy notable que aquí aparece por primer vez la ley del cuadrado inverso; se podría pensar, a primera vista, que Hooke ya había descubierto el significado de esa ley. Sin embargo, una lectura de la frase completa demuestra que tenía las ideas totalmente confusas. En realidad, lo que Hooke llamó atracción es la aceleración multiplicada por la distancia, o sea, en el lenguaje moderno, el trabajo por unidad de masa para un cuerpo uniformemente acelerado. La fórmula de Galileo para el movimiento uniformemente acelerado es $v^2 = 2ar$, así que, según Hooke, la atracción es proporcional a v^2 , y v es proporcional a $1/r$. A partir de este concepto falso Hooke obtuvo la falsa ley de Kepler de las velocidades.

¿Y de dónde sacó Hooke la ley del cuadrado inverso? La versión más favorable para él es que la obtuvo correctamente al combinar la fórmula de la aceleración centrífuga de Huygens (publicada en 1673) con la tercera ley de Kepler. El mismo Newton sugirió, algunos años después, una versión menos favorable: Hooke habría obtenido esa ley por simple analogía con la fórmula de la intensidad de la luz pues estaba pensando en términos de la teoría kepleriana de una fuerza motriz emitida por el Sol.

Dos semanas después, Hooke volvió a escribir a Newton con el pretexto de que ya había realizado el experimento del proyectil que cae. Ahí insiste en que sería interesante en conocer la trayectoria de un cuerpo que cae atraído con una aceleración inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y expresa su convicción de que Newton, con su habilidad matemática, sería capaz de resolver ese problema.

¡Y Newton lo resolvió! Invertiendo el problema, demostró que si un cuerpo se mueve a lo largo de una elipse, necesariamente la fuerza que se le aplica en todos los puntos es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco de la elipse. Y, habiéndose convencido a sí mismo, guardó el manuscrito y se olvidó de él. ¡Ni siquiera se dignó contestar a Hooke para comunicarle su descubrimiento!

11.6. Los Principia. Acto final: algunos años más tarde, en 1684, se reúnen en una taberna londinense el arquitecto Christopher Wren, el astrónomo Edmund Halley y Robert Hooke para discutir sobre el tema del movimiento de los planetas.

Tanto Halley como Wren se habían dado cuenta de que la fórmula de la aceleración centrífuga combinada con la tercer ley de Kepler implicaba una aceleración inversamente proporcional al cuadrado de las distancia. Sin embargo, ese razonamiento era válido sólo para una órbita circular. ¿Cómo sería una órbita en general si tal ley se aplica? Este es un problema que no tiene nada de trivial. Hooke presumió de lo había resuelto, pero sus compañeros no le creyeron. Finalmente, Wren ofreció un libro como premio al que resolviera primero ese problema.

A Halley se le ocurrió consultar con Isaac Newton, de cuya fama como matemático había oído hablar. Llegó a Cambridge en agosto de 1684 y planteó inmediatamente el problema al ilustre profesor: ¿Cuál sería la curva descrita por un planeta suponiendo que la fuerza de atracción hacia el Sol es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a éste?

Newton contestó inmediatamente: una elipse. Halley, sorprendido, le preguntó cómo la sabía y Newton le dijo que lo había calculado algunos años atrás. Busco entre sus papeles la demostración, pero no la encontró. Sin embargo, le prometió a Halley que volvería a hacer los cálculos y le mandaría la demostración.

Newton cumplió su palabra. En noviembre del mismo año, Halley recibió un manuscrito de 9 hojas intitulado "*De motu corporum in gyrum*" (Del movimiento de los cuerpos en órbita). Ahí se demostraba que una ley del cuadrado inverso implicaba una órbita elíptica y, en general, las tres leyes de Kepler.

Esta vez, Newton quedó totalmente fascinado con su obra y entró de lleno a escribir los Principia. Esta increíble tarea le absorbió todo su tiempo durante casi dos años. En ese período, Halley, tan emocionado como él, lo visitó varias veces en Cambridge para animarlo y enterarse del desarrollo de la obra.

Veamos con un poco de detalle cómo y cuándo surgió en la mente de Newton la idea de una gravitación universal. Se conservan actualmente tres versiones del manuscrito *de Motu*. Al parecer, el método de trabajo de Newton fue reescribir varias veces este manuscrito, adicionalmente cada vez nuevo material, hasta que surgieron los Principia después de dos años de intensísimo trabajo durante los cuales Newton se desconectó prácticamente del mundo.

En la primer versión de *de Motu* se ve inmediatamente que Newton no tiene aún el concepto de la gravitación universal. Habla de fuerzas centrípetas que mantienen a los planetas en órbita alrededor del Sol, y aun a los satélites alrededor de los planetas, pero nunca menciona una interacción de los planetas entre sí o con el Sol. La posibilidad de que las órbitas se vean perturbadas por esa interacción no se considera en lo más mínimo, y una de las razones es que Newton no tenía aún un concepto claro de la masa. Así escribe, por ejemplo:

For gravity is one kind of centripetal force: and my calculations reveal that the centripetal force by which our moon is held in her monthly orbit around the earth is to the force of gravity at the surface of the earth very nearly as the reciprocal of the square of the distance from the center of the earth.

Más adelante, habla de la casi-proporcionalidad de la cantidad de la materia y el peso de un cuerpo. Es claro que sin un concepto correcto de masa no se puede definir la fuerza. Sin embargo, Newton decide al fin, de que (en lenguaje moderno) la masa inercial es siempre proporcional a la masa gravitacional. Newton entiende inmediatamente las consecuencias de este hecho fundamental: la tercera ley de Kepler se aplica a los planetas y aún a sus satélites, debido a esta proporcionalidad entre la masa inercial y la gravitacional de los cuerpos celestes ¡y esto implica una ley universal de la gravitación! Este descubrimiento fundamental sucedió en algún momento durante los años de 1684-85.

Ahora, todo se hace más claro: todos los cuerpos materiales se atraen mutuamente y esto, a su vez, es consecuente con la tercer ley de Newton. Por si queda alguna duda, Newton pregunta al astrónomo Flamsteed si ha detectado una perturbación de las órbitas de Júpiter y Saturno cuando están más próximos entre sí. La respuesta de Flamsteed es afirmativa.

Sólo faltaba un pedazo del rompecabezas: ¿cómo atrae una masa que no es puntual? Newton logra demostrar que si una ley del cuadrado inverso es válida para cada pedazo de materia, una esfera atrae según la misma ley como si su masa estuviera concentrada en su centro.

Así, Newton había descubierto la gravitación universal, había explicado el movimiento de los planetas y, de paso, fundado una nueva ciencia: la Física.

Finalmente, el 28 de abril de 1686, el manuscrito intitulado "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*," fue oficialmente presentado a la Royal Society. El impacto que causó fue enorme, como era de esperarse. La Royal Society decidió inmediatamente comisionar a Halley para encargarse de la edición. Sin embargo, las arcas de la sociedad estaban vacías y Halley tuvo que hacerse cargo hasta del financiamiento de la publicación de los Principia, a pesar de que no era un hombre rico.

El único incidente desagradable fue que Hooke, una vez más, acusó de plagio a Newton. Si bien aceptó la originalidad de los cálculos presentados, argumentó que las ideas básicas de las que partió Newton eran suyas. La respuesta de Newton fue violenta: negó categóricamente que Hooke tuviera nada que ver con su trabajo, excepto el tiempo que le hizo perder con su correspondencia de 1679-80. Más aún, amenazó con suprimir el libro tercero de los Principia, que estaba por terminar, aquél en el que presentaba el sistema del mundo. Fue necesaria toda la diplomacia de Halley para calmar el iracible Newton y lograr que los Principia aparecieran publicados finalmente en 1687. En la versión final, Newton había borrado toda mención de Hooke. Esta vez no habría reconciliación entre los dos hombres.

La publicación de los Principia señala el nacimiento de la física como la ciencia que conocemos hoy en día. Una excelente descripción de este acontecimiento nos la da el gran historiador de la ciencia Alexandre Koyré: *La pregunta: A quo moveantur planetae?... se unió al problema famoso: A quo moveantur projecta?... Y se puede decir que la ciencia moderna, unión de la física celeste y de la física terrestre, nació el día en que la misma respuesta pudo darse a esta doble pregunta.*