12. Movimiento Planetario según Newton [7].

Supongamos que una fuerza actúa sobre una partícula de masa m de tal manera que:

- Siempre está dirigida desde m hacia o alejándose de un punto fijo O.
- Su magnitud depende solamente de la distancia r desde O.

Entonces podemos llamar la fuerza, una fuerza central o un campo de fuerza central con O como centro de fuerza.
$\vec{F}$ es una fuerza central si y solo si $\vec{F} = f(r)\hat{r}$
La fuerza es de atracción si $f(r) < 0$ o de repulsión desde O si $f(r) > 0$.
Propiedades Importantes de los Campos de Fuerza Central.

- La órbita o trayectoria de la partícula es una curva plana.
- El momentúm angular de la partícula se conserva, es decir, es constante.
- La partícula se mueve de tal manera que el vector de posición o radio vector dibujado desde O a la partícula, barre áreas iguales en tiempos iguales.

12.1. **Ecuaciones del Movimiento para una partícula en un Campo de Fuerza Central.** Como la partícula se mueve en un plano, se escogerá el plano xy y las coordenadas que describan tal movimiento serán las polares.
Antes de comenzar con la teoría iniciaremos con un análisis en coordenadas curvilíneas:

$\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n$, representan valores fijos, es decir, son constantes,
$u_0, u_1, \ldots, u_n$, representan otro grupo de constantes.

Las siguientes ecuaciones representan una familia de curvas sobre una superficie S, es decir,

- $\nu = \nu_0, \nu = \nu_1, \ldots, \nu = \nu_n$, representan una familia de curvas que llamaremos simplemente ν, $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ es un vector tangente a $\nu = constante$
$$\hat{e}_u = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}|}$$
es un vector unitario tangente a $\nu = constante$.
- $u = u_0, u = u_1, \ldots, u = u_n$, representan otra familia de curvas que llamaremos simplemente u, $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \nu}$ es un vector tangente a $u = constante$.
$$\hat{e}_\nu = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu}}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu}|}$$
es un vector unitario tangente a $u = constante$.

Si seleccionamos un sistema de coordenadas polares, enonces tenemos que $(\nu, u) \to (r, \theta)$
$$\begin{cases} \hat{e}_r & = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r} / |\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r}| \text{ vector unitario, tangente a } \theta = constante\text{, i.e. sigue la direción de } r \\ \\ \hat{e}_\theta & = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} / |\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}| \text{ vector unitario, tangente a } r = constante\text{, i.e. sigue la direción de } \theta \end{cases}$$
De $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = r\cos\theta\hat{\imath} + r\operatorname{sen}\theta\hat{\jmath}$, donde $r = |\vec{r}|$, obtenemos
$$\begin{cases} \hat{e}_r & = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r} / |\dfrac{\partial \hat{r}}{\partial r}| = \dfrac{\cos\theta\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\hat{\jmath}}{1} = \cos\theta\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\hat{\jmath} \\ \\ \hat{e}_\theta & = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} / |\dfrac{\partial \hat{r}}{\partial \theta}| = \dfrac{-r\operatorname{sen}\theta\hat{\imath} + r\cos\theta\hat{\jmath}}{r} = -\operatorname{sen}\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath} \end{cases} \tag{12.1}$$

Ya que $\hat{e}_r = \hat{e}_r(r, \theta)$, entonces la diferencial total de $\hat{e}_r$ esta dada por

$$d\hat{e}_r = \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial r} dr + \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} d\theta,$$

por lo que

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt}$$

pero $\dfrac{\partial \hat{e}_r}{\partial r} = 0$ pues $\hat{e}_r = \hat{e}_r(\theta)$ unicamente, ver ecuaciones (12.1). Entonces

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} \tag{12.2}$$

Ya que $\hat{e}_\theta = \hat{e}_\theta(r, \theta)$, entonces la diferencial total de $\hat{e}_\theta$ esta dada por

$$d\hat{e}_\theta = \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial r} dr + \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} d\theta,$$

por lo que

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt}$$

pero $\dfrac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial r} = 0$ pues $\hat{e}_\theta = \hat{e}_\theta(\theta)$ unicamente, ver ecuaciones (12.1). Entonces

$$\dot{\hat{e}}_\theta = \dot{\theta}\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} \tag{12.3}$$

Substituyendo lo obtenido de las ecuaciones (12.1) en (12.2) y (12.3):

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_r & = \dot{\theta}\{-sen\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}\} = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \\ \\ \dot{\hat{e}}_\theta & = \dot{\theta}\{-cos\theta\hat{\imath} - \operatorname{sen}\theta\hat{\jmath}\} = -\dot{\theta}\hat{e}_r \end{cases}$$

Una vez obtenido lo anterior, pasamos a obtener la aceleración $\vec{a}$ de una partícula inmersa en un campo de fuerza central.
Sabemos que $\vec{r} = r\hat{e}_r$, $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ y $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, entonces

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\hat{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\hat{e}_r = r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{r}\hat{e}_r \tag{12.4}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= r\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} + \{\frac{dr}{dt}\dot{\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\}\hat{e}_\theta + \dot{r}\frac{d\hat{e}_r}{dt} + \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{e}_r \\ &= -r\dot{\theta}\dot{\theta}\hat{e}_r + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \ddot{r}\hat{e}_r \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta}$$

La fuerza que actua sobre la partícula de masa m viene dada por $\vec{F} = m\vec{a}$, es decir,

$$\boxed{\vec{F} = m[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta]}$$

En un campo de fuerza central $\vec{F} = f(r)\hat{e}_r$, por lo tanto

$$\vec{F} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r \tag{12.5}$$

y

$$0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \tag{12.6}$$

Antes de continuar, encontraremos algunos resultados interesantes:

Ejemplo 12.1. *Demostrar que si la partícula se mueve en un campo de fuerza central, entonces su trayectoria debe ser una curva plana*

En un campo de fuerza central $\vec{F} = f(r)\hat{e}_r$ y $\vec{r} = |\vec{r}|\hat{e}_r$. Entonces $\vec{r}\text{x}\vec{F} = |\vec{r}|\hat{e}_r\text{x}f(r)\hat{e}_r = |\vec{r}|f(r)\hat{e}_r\text{x}\hat{e}_r = \vec{0}$, esto último debido a que $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_r$ son vectores paralelos. Como $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$, puede escribirse

$$\vec{r}\text{x}\vec{F} = \vec{r}\text{x}(m\frac{d\vec{v}}{dt}) = m(\vec{r}\text{x}\frac{d\vec{v}}{dt}) = \vec{0}$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{d(\vec{r}\text{x}\vec{v})}{dt} &= \vec{r}\text{x}\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}\text{x}\vec{v} = \vec{r}\text{x}\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\text{x}\vec{v} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}, \quad \text{integrando}\\ \int d(\vec{r}\text{x}\vec{v}) &= \vec{h} \quad \text{un vector constante, por lo tanto}\\ \vec{r}\text{x}\vec{v} &= \vec{h}\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por $\vec{r}\cdot$, tenemos $\vec{r}\cdot(\vec{r}\text{x}\vec{v}) = 0$, por lo que $\vec{r}\cdot\vec{h} = 0$ lo cual implica que $\vec{r}$ es perpendicular al vector constante $\vec{h}$, de modo que el movimiento se realiza en el plano. Suponemos que este plano es el plano xy cuyo origen está en el centro de fuerza. Por otro lado usando la ecuación (12.4) tenemos

$$\begin{aligned}\vec{h} &= \vec{r}\text{x}\vec{v}\\ &= \vec{r}\text{x}(r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{r}\hat{e}_r)\\ &= \dot{r}(\vec{r}\text{x}\hat{e_r}) + r\dot{\theta}(\vec{r}\text{x}\hat{e_\theta})\\ &= \dot{r}(\vec{0}) + r\dot{\theta}\hat{k} = r\dot{\theta}\hat{k}\end{aligned}$$

$$h = |\vec{h}| = r\dot{\theta} \tag{12.7}$$

De la ecuación (12.6), tenemos

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r}(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0$$

de donde $r^2\dot{\theta} = \textit{constante}$ como vimos anteriormente. Ahora según la ecuación (12.7) $h = r^2\dot{\theta}$, entonces $\dot{\theta} = \dfrac{h}{r^2}$, haciendo $r = \dfrac{1}{u}$, tenemos

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} = u^2h$$

Ejemplo 12.2. *El momentúm angular de una partícula en un campo de fuerza central se conserva, i.e. es constante.*

Del ejemplo anterior sabemos que

$$\vec{h} = \vec{r}\text{x}\vec{v}$$

multiplicando por la masa m de la partícula, tenemos

$$m\vec{h} = m(\vec{r}\text{x}\vec{v}) = \textit{momentum angular}, \quad \text{como } \vec{h} \text{ y } m \text{ son ctes. entonces lo es el momentúm angular}$$

¿Qué significa que el momentúm angular en un campo de fuerza central sea constante?, bueno significa que si la tierra u otro objeto se le hace girar en este campo o se le pone en reposo, este cuerpo seguirá girando con la misma velocidad angular a menos de que halla algún par o torque que lo detenga o lo haga disminuir en velocidad o seguirá en reposo a menos de que un par lo ponga a rotar.

Pasamos ahora a obtener nuevas expresiones para las variables involucradas en $f(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{d1/u}{d\theta}\dot{\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -\frac{1}{u^2}u^2h\frac{du}{d\theta} = -h\frac{du}{d\theta} = -h\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d(-h\frac{du}{d\theta})}{d\theta}\dot{\theta} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -h\dot{\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -hu^2h\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

por lo tanto

$$\ddot{r} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Substituyendo en $f(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$ las nuevas variables, tenemos:

$$\begin{aligned} f(r) &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ f(1/u) &= m(-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u}u^4h^2) \\ &= m(-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - u^3h^2) \\ \frac{f(1/u)}{m} &= -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - u^3h^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial que describe el movimiento de un planeta alrededor del Sol viene dada por:

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{f(1/u)}{mh^2u^2} \quad \text{siendo} \quad r = \frac{1}{u}}$$

Ahora, sabemos que el campo es central, i.e. la fuerza varía en forma inversa cuadrado:

$$\begin{aligned} f(r) &= -\frac{GMm}{r^2} = -K/r^2 \\ f(1/u) &= -Ku^2 \end{aligned}$$

entonces, substituyendo esta expresión en la ecuación diferencial antes obtenida:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{mh^2}$$

resolviendola para r:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\frac{K}{mh^2} - C\cos(\theta - \omega)} \\ r &= \frac{h^2/GM}{1 - \epsilon'\cos(\theta - \omega)} \\ r &= \frac{h^2}{GM[1 - \epsilon\cos(\theta - \omega)]} \end{aligned}$$

ahora, siempre es posible escoger los ejes de tal manera que $\omega = 0$, entonces

$$r = \frac{h^2}{GM[1 - \epsilon\cos\theta]}$$

donde ϵ es la excentricidad y ω es la constante del perihelio del planeta. Asi, el planeta se mueve alrededor de Sol describiendo una trayectoria dada por la última ecuación que representa una cónica (elipse, parábola o hipérbola). Substituyendo los valores de las constantes en la ecuación, resulta que la trayectoria del planeta describe una elipse ($0 < \epsilon < 1$) invariante ($\omega = constante$, i.e. el perihelio - distancia más cercana del planeta al Sol - no avanza, o dicho de otra forma es una elipse cerrada) en un mismo plano, a diferencia de lo que posteriormente Einstein encontró en sus ecuaciones del movimiento planetario (en su teoría general de la relatividad), donde la trayectoria del planeta describe una elipse en un mismo plano, pero cuyo perihelio avanza en cada revolución de éste i.e. la trayectoria del planeta describe una elipse no cerrada.
Los siguientes cuatro ejemplos aclararán muchas dudas sobre lo visto anteriormente:

Ejemplo 12.3. *Hallar la fuerza de atracción de un cascarón esférico de radio a sobre una partícula P de masa m a una distancia $r > a$ de su centro.*

Para resolver el problema, considere el cascarón esférico formado por elementos circulares o anillos. El radio de un elemento circular o anillo en el cascarón (ver figura al final de la sección) es $a \operatorname{sen}\theta$, por lo que el perímetro de ese elemento circular es $2\pi a \operatorname{sen}\theta$. El área del mismo elemento circular, viene dado por el producto del perímetro encontrado y el espesor de éste que no es sino la longitud de arco $a\,d\theta$, i.e. $dA = (2\pi a \operatorname{sen}\theta)(a\,d\theta) = 2\pi a^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta$.
Sea σ la masa por unidad de área, entonces, la masa del elemento o anillo circular vale

$$dM = 2\pi a^2 \sigma \operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

Como todos los puntos del anillo se hallan a la misma distancia w de P, tenemos que el elemento de la fuerza resultante $d\vec{F}$ ejercido por el anillo, se encuentra dirigida hacia el centro del cascarón, es decir,

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= G\frac{dM\,m}{w^2} = G\frac{(2\pi a^2\sigma \operatorname{sen}\theta\,d\theta)(m)}{w^2}\cos\phi\,\hat{n} \\ d\vec{F} &= G\frac{2\pi a^2\sigma m \operatorname{sen}\theta\,d\theta}{w^2}\cos\phi\,\hat{n} \end{aligned}$$

También

$$\cos\phi = \frac{PE}{PA} = \frac{PO - EO}{PA} = \frac{r - \cos\theta}{w} = \frac{r - a\cos\theta}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta)^{1/2}}$$

ya que $w^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta$, es decir,

$$\begin{aligned} w^2 &= a^2\operatorname{sen}^2\theta + (r - a\cos\theta)^2 \\ &= a^2\operatorname{sen}^2\theta + r^2 - 2ar\cos\theta + a^2\cos^2\theta \\ &= a^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + r^2 - 2ar\cos\theta \\ &= a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta \end{aligned}$$

Por lo que el elemento de fuerza $d\vec{F}$ se puede expresar

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= G\frac{2\pi a^2\sigma m \operatorname{sen}\theta}{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}\frac{r - a\cos\theta\,d\theta}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta)^{1/2}}\,\hat{n} \\ d\vec{F} &= G\frac{2\pi a^2\sigma m \operatorname{sen}\theta(r - a\cos\theta)\,d\theta}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta)^{3/2}}\,\hat{n} \\ \vec{F} &= \int_{\theta=0}^{\pi} G\frac{2\pi a^2\sigma m \operatorname{sen}\theta(r - a\cos\theta)\,d\theta}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta)^{3/2}}\,\hat{n} \\ \vec{F} &= G2\pi a^2\sigma m\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta(r - a\cos\theta)\,d\theta}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta)^{3/2}}\,\hat{n} \end{aligned}$$

Note que en la integral cuando vamos de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$ sumamos la totalidad de anillos diferenciales en el cascarón. Para calcular esta integral primero haremos un cambio de variable, sabemos que $w^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta$, entonces $(w^2)^{3/2} = w^3 = (a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta)^{3/2}$. Cuando $\theta = 0$ tenemos

$$w^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta = a^2 + r^2 - 2ar = r^2 - 2ar + a^2 = (r - a)^2$$

por lo que $w = r - a$, se podría haber obtenido $w = a - r$ pero en este problema $r > a$. Cuando $\theta = \pi$ tenemos

$$w^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta = a^2 + r^2 + 2ar = r^2 + 2ar + a^2 = (r + a)^2$$

por lo que $w = r + a$. También diferenciando la expresión para w^2 se obtiene

$$2w\,dw = 2ar\operatorname{sen}\theta,$$

ahora,

$$r - a\cos\theta = r - a(\frac{w^2 - a^2 - r^2}{-2ar}) = r + \frac{w^2 - a^2 - r^2}{2r} = \frac{2r^2 + w^2 - a^2 - r^2}{2r} = \frac{w^2 + r^2 - a^2}{2r}$$

asi que subsituyendo estas expresiones en la integral obtenemos

$$\vec{F} = \frac{G2\pi a^2\sigma m}{2ar}\int_{r-a}^{r+a}\frac{2wdw}{w^3}(\frac{w^2+r^2-a^2}{2r})\,\hat{n}$$

$$= \frac{G\pi a\sigma m}{r^2}\int_{r-a}^{r+a}\frac{dw}{w^2}(w^2+r^2-a^2)\,\hat{n}$$

$$\vec{F} = \frac{G\pi a\sigma m\hat{n}}{r^2}\int_{r-a}^{r+a}(1+\frac{r^2-a^2}{w^2})\,dw \tag{12.8}$$

$$= \frac{G\pi a\sigma m\hat{n}}{r^2}\left[w\Big|_{r-a}^{r+a} - \frac{r^2-a^2}{w}\Big|_{r-a}^{r+a}\right]$$

$$= \frac{G\pi a\sigma m\hat{n}}{r^2}\left[(r+a)-(r-a)+\frac{a^2-r^2}{r+a}-\frac{a^2-r^2}{r-a}\right]$$

$$= \frac{G\pi a\sigma m\hat{n}}{r^2}[2a+r+a-r+a]$$

$$\vec{F} = \frac{4G\pi a^2\sigma m}{r^2}\,\hat{n} \tag{12.9}$$

Ejemplo 12.4. *Desarrollar el ejemplo anterior, utilizando la hipótesis de Newton de que la fuerza de gravedad del cascarón es la misma como si la toda la masa éste estuviera concentrada en su centro.*

Para encontrar la masa total del cascarón, necesitamos encontrar el área de su superficie, es decir, $A = 4\pi a^2$. Suponiendo que σ esta definida de igual manera a la del problema anterior, es decir la masa por unidad de área, tenemos que la masa total del cascarón vale $M = A\sigma = 4\pi a^2\sigma$, por lo que la fuerza de atracción suponiendo concentrada toda esta masa en el centro gravitatorio que en este caso coincide con el centro geometrico del cascarón valdrá

$$\vec{F} = G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{(4\pi a^2\sigma)(m)}{r^2}\,\hat{n} = \frac{4G\pi a^2\sigma m}{r^2}\,\hat{n}$$

que es la misma expresión que la que se obtuvo en el ejemplo anterior.

Ejemplo 12.5. *Desarrollar el ejemplo 1 si $r < a$.*

Desarrollando todo de igual manera a del ejemplo 1, llegamos a una expresión similar a (12.8) excepto que en lugar de obtener $w = r - a$ para $\theta = 0$, en este caso $r < a$, entonces $w = a - r$, quedando $w = r + a = a + r$ para el caso $\theta = \pi$. Asi que (12.8) queda

$$\vec{F} = \frac{G\pi a\sigma m\hat{n}}{r^2}\int_{a-r}^{a+r}(1+\frac{r^2-a^2}{w^2})\,dw$$

despues, integrando esta expresión

$$\vec{F} = \frac{G\pi a\sigma m\hat{n}}{r^2}\int_{a-r}^{a+r}(1+\frac{r^2-a^2}{w^2})\,dw$$

$$= \frac{G\pi a\sigma m\hat{n}}{r^2}\left[w\Big|_{a-r}^{a+r} - \frac{r^2-a^2}{w}\Big|_{a-r}^{a+r}\right]$$

$$= \frac{G\pi a\sigma m\hat{n}}{r^2}\left[a+r-(a-r)-\frac{r^2-a^2}{a+r}+\frac{r^2-a^2}{a-r}\right]$$

$$= \frac{G\pi a\sigma m\hat{n}}{r^2}\left[2r+\frac{(r^2-a^2)(a+r)-(r^2-a^2)(a-r)}{a^2-r^2}\right]$$

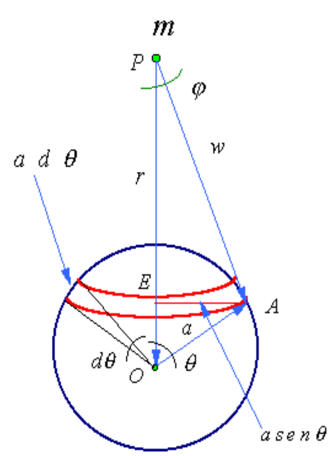
$$= \frac{G\pi a\sigma m\hat{n}}{r^2}\left[\frac{2a^2r-2r^3+2r^3-2a^2r}{a^2-r^2}\right] = \vec{0}$$

Por lo que la fuerza gravitatoria que actúa sobre una partícula de masa m dentro del cascarón esférico es cero, es decir, m no experimenta fuerza gravitatoria alguna al entrar dentro del cascarón.
Resulta un tanto paradojica esta situación, ya que uno esperaría a primer instancia que la fuerza fuese cero solo en el centro del cascarón, y diferente de cero en otro lugar como por ejemplo cerca de una de las paredes interiores del cascarón. Sin embargo, vamos a ver esta situación más detenidamente: Suponga que la partícula se encuentra sobre el diámetro del cascarón (para simplificar) a una distancia η de una de las paredes del cascarón que la vamos a llamar la pared "derecha" ($\eta << a$). Entonces la pared que queda justo al frente de la pared "derecha" (o sea la pared "izquierda") se encontrará a una distancia $a-\eta$ de la partícula m. Al estar muy cerca la partícula m de la pared derecha las fuerzas de atracción que se ejercen sobre m por los elementos de masa de dicha pared serán mayores en magnitud que las fuerzas provocadas por los elementos de masa de la pared izquierda, sin embargo, la mayoría de los vectores fuerza ejercidos por la primer pared estarán formando ángulos más cercanos a $\pi/2$ con respecto al diámetro del cascarón, a excepción, claro está del vector fuerza que está exactamente sobre el diámetro del cascarón. Por lo que las fuerzas del lado derecho aunque mayores en magnitud, sus componentes sobre el diámetro serán pequeñas (por formar un ángulo cercano a $\pi/2$) que serán compensadas exactamente en magnitud pero sentido contrario a las componentes correspondientes a las fuerzas ejercidas por la pared izquierda, que aunque de un valor menor en magnitud, sus componentes sobre el diámetro son casí del mismo valor a éstas ya que forman ángulos cercanos a 0 por ser $a-\eta$ muy grande en comparación de la distancia η.
Suponga que $\vec{F}_{izquierda} < \vec{F}_{derecha}$. Sin embargo, la fuerza izquierda forma un ángulo $\theta_{izquierda}$ con respecto al diámetro del cascarón que es menor al correspondiente $\theta_{derecha}$ de la fuerza derecha, de tal forma que

$$\vec{F}_{izquierda}\cos\theta_{izquierda} = \vec{F}_{derecha}\cos\theta_{derecha}$$

Ejemplo 12.6. *Halla la fuerza de atracción de una esfera sólida de radio a sobre una partícula de masa m a una distancia $b < a$ a partir de su centro.*

La partícula se encuentra dentro de la esfera sólida de radio a a una distancia b del centro de ésta ($b < a$). Fijandonos en la posición de la masa m, es posible formar un cascarón esférico de radio a como el del ejemplo 1, donde el grosor de la cascara es $a-b$. De esta forma y según el problema 3, la fuerza de gravedad ejercida por esa cantidad de masa (la cascara de grosor $a-b$) sobre la particula de masa m es cero y entonces es posible eliminarla, quedando entonces la masa m sobre la superficie de una esfera más pequeña, es decir, aquella esfera que queda despues de que eliminamos la cascara $a-b$. Esta esfera sólida tendrá un radio b. Si σ es la masa por unidad de volumen, la masa de dicha esfera es



$$M = V\cdot\sigma = \frac{4}{3}\pi b^3\sigma$$

de esta forma la fuerza de atracción será

$$\vec{F} = G\frac{Mm}{r^2}\,\hat{n} = G\frac{(\frac{4}{3}\pi b^3\sigma)(m)}{b^2}\,\hat{n}$$

$$\vec{F} = \frac{4}{3}\pi G\sigma m b\,\hat{n}$$

Por lo tanto la fuerza varía en función directa a la distancia b de la masa al centro.