## 13. Noción matemática de un vector (tensores) [8].

Consideremos un conjunto de tres números $(A_1, A_2, A_3)$, los cuales están asociados con algún punto $(x_1, x_2, x_3)$.
Hacemos un cambio de coordenadas y obtenemos el punto $(x_1', x_2', x_3')$, asi los nuevos números asociados a este punto serán $(A_1', A_2', A_3')$. Luego por brevedad propongo nombrar a estos dos conjuntos de números $\mathfrak{A}$
El matemático comenzará a darnos una lista de los números $\mathfrak{A}$ para cada diferente sistema de coordenadas. Entonces por ejemplo $\mathfrak{A}$ significará:

- $A_1, A_2, A_3$ para coordenadas rectangulares $x, y, z$
- $A_1', A_2', A_3'$ para coordenadas polares $r, \theta, \phi$
- $A_1'', A_2'', A_3''$ para coordenadas elipsoidales $\lambda, \mu, \nu$

Pero el matemático dice: "Nunca terminaré a este ritmo". Hay un número infinito de sistemas de coordenadas, deberé alterar mis planes: Les daré una regla general para encontrar nuevos valores de $\mathfrak{A}$ cuando pasen de un sistema de coordenadas a otro y de esta manera solo sera necesario para mi darte un conjunto de valores y ustedes pueden encontrar todos los demas.
¿Qué clase de regla adoptaremos? Examinemos las cantidades que queremos involucrar Hay dos conjunto de números que queremos relacionar, digamos

$$A_1, A_2, A_3 \text{ y } A_1', A_2', A_3'$$

Nada se ha dicho acerca de estas cantidades, hasta ahora solo sabemos que son números aislados. Por lo tanto no hay problema el introducir sus derivadas. Ellas estan relacionados por la misma localidad donde están, en algún punto del espacio $(x, y, z)$ y $(r, \theta, \phi)$. Ellas están cambiando porque el sistema de coordenadas ha cambiado *en este punto* y este cambio es definido por cantidades como $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}$, y asi sucesivamente. Las coordenadas integrales mismas $x, y, z, r, \theta, \phi$ no pueden estar involucradas puesto que ellas expresan distancias al origen, mientras que nosotros estamos interesados en los cambios en el punto donde $(A_1, A_2, A_3)$ esta localizado.
Asi la regla debe involucrar solo los números $A_1, A_2, A_3, A_1', A_2', A_3'$ combinados con sus mutuas derivadas de $x, y, z, r, \theta, \phi$. Una regla podría ser

$$\begin{aligned} A_1' &= \frac{\partial r}{\partial x}A_1 + \frac{\partial r}{\partial y}A_2 + \frac{\partial r}{\partial z}A_3 \\ A_2' &= \frac{\partial \theta}{\partial x}A_1 + \frac{\partial \theta}{\partial y}A_2 + \frac{\partial \theta}{\partial z}A_3 \\ A_3' &= \frac{\partial \phi}{\partial x}A_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y}A_2 + \frac{\partial \phi}{\partial z}A_3, \end{aligned}$$

es decir,

$$A_\sigma' = \sum_{\tau=1}^{3} \frac{\partial x_\sigma'}{\partial x_\tau} A_\tau$$

Aplicando la misma regla para la tranformación de $(r, \theta, \phi)$ a $(\lambda, \mu, \nu)$ tenemos

$$A_1'' = \frac{\partial \lambda}{\partial r}A_1' + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}A_2' + \frac{\partial \lambda}{\partial \phi}A_3'$$

por lo tanto, substituyendo por $A_1', A_2', A_3'$ de las ecuaciones anteriores y agrupando terminos,

$$\begin{aligned} A_1'' &= (\frac{\partial \lambda}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x})A_1 + (\frac{\partial \lambda}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y})A_2 + (\frac{\partial \lambda}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial z})A_3 \\ A_1'' &= \frac{\partial \lambda}{\partial x}A_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial y}A_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial z}A_3 \end{aligned}$$

quedando para todos los índices

$$A''_\sigma = \sum_{\tau=1}^{3} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\tau} A_\tau$$

la cual es la misma fórmula que pudo ser obtenida aplicando la regla a la transformación directamente de $(x, y, z)$ a $(\lambda, \mu, \nu)$. La regla es autoconsistente. De hecho el analisis tensorial permite representar las leyes de la Naturaleza sin necesidad del uso de un sistema coordenado, debido a que éste, es solo una ficción de nuestra mente, en la realidad tan solo el fenómeno en sí mismo es lo que importa y no el sistema coordenado utilizado para representarlo. El cálculo tensorial nació con los trabajos de Christoffel, Riemman y Levi-Civita, con el cual las leyes naturales se han podido expresar analíticamente y en forma intrínseca.

13.1. **Coordenadas curvilineas ortogonales.** Sea $\vec{r} = x\imath + y\jmath$ el vector de posición de un punto $p$. Cosideremos las coordenadas rectangulares $(x, y)$ del punto expresadas en función de las nuevas variables $(u_1, u_2)$ en la forma

$$x = x(u_1, u_2), \quad y = y(u_1, u_2)$$

o bien, despejando $(u_1, u_2)$,

$$u_1 = u_1(x, y), \quad u_2 = u_2(x, y)$$

Entonces ya que $\vec{r} = \vec{r}(x, y)$ tenemos $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2)$. El vector tangente en $p$ a la línea $u_1$ (para la cual $u_2$ es constante) es $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}$. Entonces el vector unitario tangente en la dirección y sentido anterior es $\hat{e_1} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}/|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}|$, de tal forma que

$$\hat{e_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \Big/ \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right| = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}/h_1,$$

$$\hat{e_2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \Big/ \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\right| = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}/h_2$$

Las magnitudes $h_1$ y $h_2$ son llamadas *factores de escala*.
El vector normal en $p$ en la superficie $u_1 = c_1$, es $\vec{\nabla} u_1$, el correspondiente vector unitario en esta dirección y sentido viene dado por $\vec{E_1} = \vec{\nabla} u_1/|\vec{\nabla} u_1|$, quedando entonces

$$\vec{E_1} = \vec{\nabla} u_1/|\vec{\nabla} u_1|,$$

$$\vec{E_2} = \vec{\nabla} u_2/|\vec{\nabla} u_2|$$

Un vector $\vec{A}$ se puede expresar en función de los vectores unitarios en la base $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ o bien, en la base $\vec{E_1}, \vec{E_2}$, es decir

$$\vec{A} = A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} = \mathbb{A}_1\vec{E_1} + \mathbb{A}_2\vec{E_2}$$

Todo vector $\vec{A}$ también puede expresarse en función de los vectores $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}$ o $\vec{\nabla} u_1, \vec{\nabla} u_2$ quedando

$$\boxed{\vec{A} = \alpha^1 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} + \alpha^2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} = a_1 \vec{\nabla} u_1 + a_2 \vec{\nabla} u_2}$$

Siendo $\alpha^1$, $\alpha^2$ las componentes contravariantes y $a_1$, $a_2$ las componentes covariantes del vector $\vec{A}$. Se demuestra y por razones de espacio, que las componentes contravariantes se transforman al pasar de un sistema de referencia a otro, de la siguiente manera

$$\boxed{{\alpha'}^\sigma = \sum_{\tau=1}^{2} \frac{\partial u'_\sigma}{\partial u_\tau} \alpha^\tau}$$

Si dos magnitudes $\alpha^1$, $\alpha^2$ en un sistema de coordenadas $(u_1, u_2)$ estan relacionadas con otras ${\alpha'}^1$, ${\alpha'}^2$ en otro sistema de coordenadas $(u'_1, u'_2)$ por las ecuaciones de transformación anteriores, dichas magnitudes se llaman componentes de un vector o tensor contravariante de primer orden.

Y las componentes covariantes se transforman al pasar de un sistema de referencia a otro, de la siguiente manera

$$\boxed{a'_{\sigma} = \sum_{\tau=1}^{2} \frac{\partial u_\tau}{\partial u'_\sigma} a_\tau}$$

Si dos magnitudes $a_1$, $a_2$ en un sistema de coordenadas $(u_1, u_2)$ estan relacionadas con otras $a'_1$, $a'_2$ en otro sistema de coordenadas $(u'_1, u'_2)$ por las ecuaciones de transformación anteriores, dichas magnitudes se llaman componentes de un vector o tensor covariante de primer orden.
Según la convención de índices repetidos debida a Einstein, es posible eliminar el signo de sumatoria, entendiendose que cuando existan índices repetidos como en la última ecuación, es decir, en $\tau$, se deberá entender que la sumatoria es con respecto a ese índice y siendo $\sigma$ un índice libre, que indica que debe formarse una nueva ecuación por cada valor de ese índice. Las últimas ecuaciones quedan entonces:

$$\alpha'^{\sigma} = \frac{\partial u'_\sigma}{\partial u_\tau} \alpha^\tau, \quad \text{y}$$
$$a'_{\sigma} = \frac{\partial u_\tau}{\partial u'_\sigma} a_\tau$$

cada una de las ecuaciones anteriores representa dos ecuaciones con dos términos cada una.
Elementos de línea: En coordenadas cartesianas el elemento de línea viene dado por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

En la teoría de la relatividad especial, el elemento de línea para el espacio-tiempo viene dado por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - c^2 dt^2$$

teniendo la misma expresión en todos los puntos del espacio. Para el caso de coordenadas curvilíneas tenemos

$$\hat{e}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} / h_1,$$
$$\hat{e}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} / h_2$$

por lo que

$$d\vec{r} = h_1 du_1 \hat{e}_1 + h_2 du_2 \hat{e}_2$$

Como $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2)$ donde $\vec{r}$ es el vector de posición en $p$, tenemos

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2$$

sabemos que $d\vec{r} \cdot d\vec{r} = ds^2$ asi que

$$ds^2 = \{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2\} \cdot \{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2\}$$
$$ds^2 = \sum_{\sigma=1}^{2} \sum_{\tau=1}^{2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_\sigma} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_\tau} du_\sigma du_\tau$$

llamando $g_{\sigma\tau} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_\sigma} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_\tau}$, tenemos

$$ds^2 = \sum_{\sigma=1}^{2} \sum_{\tau=1}^{2} g_{\sigma\tau} du_\sigma du_\tau = g_{\sigma\tau} du_\sigma du_\tau$$

Siendo esta la forma métrica fundamental o forma métrica, las magnitudes $g_{\sigma\tau}$ se llaman coeficientes métricos y son simétricos. También $g_{\sigma\tau}$ representa un tensor covariante de segundo orden, el cual juega un papel importante en la teoría de la relatividad general, de hecho Einstein lo identifica como los potenciales gravitatorios. Se definen también $g^{\mu\nu} = 1/g_{\mu\nu}$, donde (para un espacio de 4 dimensiones)

$$g_{\mu\nu}g^{\sigma\nu} = \delta^{\sigma}_{\mu} = \begin{cases} 4 & \text{si } \sigma = \mu \\ 0 & \text{si } \sigma \neq \mu \end{cases}$$

y $g = |g_{\sigma\tau}|$. Cabe hacer notar que $ds$ es un invariante, es decir un tensor de orden cero, y por ende tiene el mismo valor en cualquier sistema de coordenadas a utilizar. Conociendo $ds$ es posible descubrir todas las propiedades de la superficie, por este hecho, al conocerse $ds$ en relatividad, es posible descubrir todas las propiedades del espacio tiempo cerca de un campo gravitatorio.

**Tensores contravariantes de orden superior al primero.** Multiplicando las componentes $A^{\mu}$ y $B^{\nu}$ de dos tensores contravariantes de primer orden, formamos el tensor contravariante de segundo orden $A^{\mu\nu}$.

$$A^{\mu\nu} = A^{\mu}B^{\nu}\,,$$

entonces,

$$A'^{\sigma} = \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}}A^{\mu} \quad \text{y}$$
$$B'^{\tau} = \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\nu}}B^{\nu}$$

entonces, $A^{\mu\nu}$ satisface la ley de transformación

$$A'^{\sigma}B'^{\tau} = \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\nu}}A^{\mu}B^{\nu}$$
$$A'^{\sigma\tau} = \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\nu}}A^{\mu\nu}$$

**Tensores covariantes de orden superior al primero.** Multiplicando las componentes $A_{\mu}$ y $B_{\nu}$ de dos tensores covariantes de primer orden, formamos el tensor covariante de segundo orden $A_{\mu\nu}$.

$$A_{\mu\nu} = A_{\mu}B_{\nu}\,,$$

entonces,

$$A'_{\sigma} = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}}A_{\mu} \quad \text{y}$$
$$B'_{\tau} = \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}}B_{\nu}$$

entonces, $A_{\mu\nu}$ satisface la ley de transformación

$$A'_{\sigma}B'_{\tau} = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}}\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}}A_{\mu}B_{\nu}$$
$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}}\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}}A_{\mu\nu}$$

**Tensores mixtos de orden superior:** Se puede formar un tensor mixto de segundo orden $A^{\beta}_{\alpha}$, multiplicando las componentes de un tensor contravariante $A^{\beta}$ con uno covariante $B_{\alpha}$, satisfaciendo la ley de transformación

$$A^{\beta}_{\alpha} = A^{\beta}B_{\alpha}$$
$$A'^{\tau} = \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\beta}}A^{\beta} \quad \text{y}$$
$$B'_{\sigma} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\sigma}}B_{\alpha}$$

$$A'^{\tau}B'_{\sigma} = \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\beta}}\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\sigma}}A^{\beta}B_{\alpha}$$

$$A'^{\tau}_{\sigma} = \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\beta}}\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\sigma}}A^{\beta}_{\alpha}$$

tal tensor mixto de segundo orden es leído como contravariante de primer orden y covariante de primer orden. Otro tensor mixto puede ser $A^{\mu}_{\sigma}A^{\nu} = A^{\mu\nu}_{\sigma}$ - mixto de tercer orden, contravariante de segundo orden y covariante de primer orden.
Debo aclarar aquí que el hecho de utilizar la misma letra "$A$" como por ejemplo en el producto $A_{\mu\nu} = A_{\mu}B_{\nu}$ no significa que $A_{\mu\nu}$ y $A_{\mu}$ sean iguales, uno es un tensor covariante de segundo orden que dió como resultado de multiplicar dos tensores covariantes de primer orden $A_{\mu}$ y $B_{\nu}$.
**Tensor simétrico:** Un tensor $A^{\mu\nu}$ es simétrico si

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu} \quad \text{o} \quad A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}.$$

**Tensor antisimétrico:** Un tensor $A^{\mu\nu}$ es antisimétrico si

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu} \quad \text{o} \quad A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}.$$

**Multiplicación externa de tensores.** Se llama multiplicación externa de dos tensores el resultado de multiplicar las componentes de uno de ellos por cada una de las del otro, dando lugar a un tercer tensor de orden igual a la suma de los órdenes de los tensores factores.

$$A_{\mu\nu}B_{\sigma} = T_{\sigma\mu\nu}$$

resulta un tensor de 3er orden con 64 componentes

$$A^{\alpha\beta}B^{\gamma\delta} = T^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

resulta un tensor de 4to orden con 256 componentes

$$A_{\alpha\beta\gamma}B^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma}$$

resulta un tensor de 5to orden con 1024 componentes

**Reducción de un tensor:** Sea $A'^{\tau}_{\mu\nu\sigma}$ un tensor mixto, si se igualan los índices $\tau$ y $\sigma$, se puede demostrar que $A'^{\sigma}_{\mu\nu\sigma} = A'_{\mu\nu}$ que es un tensor reducido (covariante de segundo orden en el sistema de coordenadas primado).

$$A'^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial x'_{\alpha}}{\partial x_{\tau}}\frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\beta}}\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\gamma}}\frac{\partial x_{\sigma}}{\partial x'_{\delta}}A^{\tau}_{\mu\nu\sigma}$$

igualando $\tau$ y $\sigma$ queda

$$A'^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial x'_{\alpha}}{\partial x_{\tau}}\frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\beta}}\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\gamma}}\frac{\partial x_{\tau}}{\partial x'_{\delta}}A^{\tau}_{\mu\nu\tau}$$

$$A'^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial x'_{\alpha}}{\partial x_{\tau}}\frac{\partial x_{\tau}}{\partial x'_{\delta}}\frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\beta}}\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\gamma}}A^{\tau}_{\mu\nu\tau}$$

por cálculo tenemos

$$A'^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial x'_{\alpha}}{\partial x'_{\delta}}\frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\beta}}\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\gamma}}A^{\tau}_{\mu\nu\tau}$$

$$\text{donde} \quad \frac{\partial x'_{\alpha}}{\partial x'_{\delta}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \delta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \delta \end{cases}$$

$$A'_{\beta\gamma} = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\beta}}\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\gamma}}A_{\mu\nu}$$

**Multiplicación interna y mixta de dos tensores.** Por multiplicación externa de dos factores seguida de una reducción obtenemos el *producto interno.*

$$A_{\mu\nu}B^{\sigma} = D^{\sigma}_{\mu\nu}$$

ahora reducimos con respecto a los índices $\nu$ y $\sigma$

$$D^{\nu}_{\mu\nu} = D_{\mu}$$

*El producto interno de los tensores $A_{\mu\nu}$ y $B^{\sigma}$, se indica así:*

$$A_{\mu\nu}B^{\nu}$$

Por multiplicación externa de $A_{\mu\nu}$ y $B^{\sigma\tau}$ y una sola reducción se obtiene un tensor mixto de segundo orden

$$A_{\mu\nu}B^{\sigma\nu} = C^{\sigma\nu}_{\mu\nu} = C^{\sigma}_{\nu}$$

**Criterio para probar el caracter tensorial:** Si un producto tal como $A_{(\mu\nu)}B^{\nu\mu}$, cualquiera que sea el tensor $B^{\nu\mu}$, es un invariante (escalar o tensor de orden cero), $A_{(\mu\nu)}$ tendrá que ser un tensor, en este caso covariante de segundo orden.

**Símbolos de Christoffel:** Se conoce por primer símbolo de Christoffel la expresión

$$\left[{\mu\nu \atop \sigma}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}\right)$$

El segundo símbolo de Christoffel es el siguiente

$$\left\{{\mu\nu \atop \tau}\right\} = g^{\tau\sigma}\left[{\mu\nu \atop \sigma}\right] = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$$

aunque la última forma sugiere un caracter tensorial de los símbolos, éstos no lo son en general.
Otras relaciones importantes son (que se omite la demostración por cuestiones de cansancio)

$$\left\{{\mu\nu \atop \tau}\right\} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_{\sigma}} = \frac{\partial Log\sqrt{-g}}{\partial x_{\sigma}}$$

**Ecuaciones de las líneas godésicas:** El elemento lineal $ds$ es un magnitud independiente del sistema de coordenadas en que está expresado. De la misma manera, no dependerá tampoco de éstas la longitud total de una "línea" determinada trazada entre dos puntos $p_1$ y $p_2$. Si esta "línea" es tal que su longitud $\int_{p_1}^{p_2} ds$ es un mínimo (línea geodésica) en un sistema de coordenadas, entonces conservará la misma propiedad en todos los demás sistemas de coordenadas

$$\frac{d^2x_{\tau}}{ds^2} + \left\{{\mu\nu \atop \tau}\right\}\frac{dx_{\mu}}{ds}\frac{dx_{\nu}}{ds} \quad \text{Ecuación de las líneas geodésicas}$$

En un sistema coordenado cartesiano las $g_{\mu\nu}$ son constantes, por ende $\left\{{\mu\nu \atop \tau}\right\} = 0$ y la ecuación de la línea geodésica se reduce a la ecuación de un línea recta.

**Derivada covariante:** La teoría ordinaria de vectores en el espacio euclídeo de tres dimensiones, referido a coordenadas de Galileo, nos dice que la derivada $\dfrac{dA_{\mu}}{dx_{\sigma}}$ representa la variación por unidad de coordenada $x_{\sigma}$ de las componentes del vector $A_{\mu}$, si las coordenadas no son de Galileo (tanto si el espacio es o no euclídeo), la derivada $\dfrac{dA_{\mu}}{dx_{\sigma}}$ puede no representar la variación absoluta del vector respecto a la coordenada, e.g. *En un campo de fuerza uniforme referido a coordenadas polares, la variación de la componente según el radio vector no indica necesariamente un cambio real de la fuerza o un defecto de uniformidad del campo.* Si alguna cosa puede indicar la variación absoluta de las componentes de un vector es un tensor, y este tensor es la derivada covariante, puesto que se reduce a la derivada ordinaria cuando el sistema es de Galileo, por ser nulos los símbolos de Christoffel ($g_{\mu\nu} = constante$)

La derivada covariante $A_{\mu\nu}$ de $A_{\mu}$ se compone de la derivada ordinaria $\dfrac{dA_{\mu}}{dx_{\nu}}$ (variación de $A_{\mu}$ según la dirección de $x_{\nu}$), y además, de la parte $-\left\{{\mu\nu \atop \tau}\right\}A_{\tau}$ atribuible a la curvatura de las coordenadas. Esta última parte es la que desaparece para los sistemas de Galileo.

La utilidad de la derivadad covariante estriba principalmente en su degeneración en la derivada ordinaria.

Cuando se tenga una ley física expresada por fórmulas en que figuran relaciones que son visiblemente formas degeneradas de tensores y sus derivadas ordinarias, se puede generalizar el resultado para sistemas cualesquiera de coordenadas, reemplazando las formas degeneradas por los propios tensores y las derivadas ordinarias por las covariantes.

$$A^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} + \left\{ {\tau\nu \atop \mu} \right\} A^{\tau}$$

La derivada covariante de $A^{\mu}$, es el tensor mixto $A^{\mu}_{\nu}$

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} - \left\{ {\sigma\mu \atop \tau} \right\} A_{\tau\nu} - \left\{ {\sigma\nu \atop \tau} \right\} A_{\tau\mu}$$

La derivada covariante de $A_{\mu\nu}$, es el tensor mixto $A_{\mu\nu\sigma}$

Nótese también como la derivada covariante de un tensor, aumenta en un orden la covariancia del tensor correspondiente.

**Divergencia de un tensor contravariante de segundo orden:** Este se obtiene por reducción de índices $\sigma$ y $\beta$ de la derivada covariante del tensor $A^{\alpha\beta}$, es decir, la derivada covariante del tensor es

$$A^{\alpha\beta}_{\sigma} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}} + \left\{ {\sigma\rho \atop \alpha} \right\} A^{\rho\beta} + \left\{ {\sigma\rho \atop \beta} \right\} A^{\rho\alpha}$$

luego se efectua una reducción igualando los índices $\sigma = \beta$ en

$$A^{\alpha}_{\sigma} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} + \left\{ {\beta\rho \atop \alpha} \right\} A^{\rho\beta} + \left\{ {\beta\rho \atop \beta} \right\} A^{\rho\alpha}$$

quedando finalmente la divergencia del tensor $A^{\alpha\beta}$ como

$$A^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} A^{\alpha\beta})}{\partial x_{\beta}}$$

Recuerde que la anulación de la divergencia de un vector ordinario, nos indica que no hay fuentes ni resumideros en un fluido (permanencia). Análogamente en el espacio de 4 dimensiones en un campo gravitatorio la anualción del tensor que contiene la ley del campo, expresa tambien la condición de conservación o permanencia del campo.

**Tensor de Riemann-Christoffel:** Puesto que el tensor fundamental $g_{\mu\nu}$ define completamente la métrica $ds$ de una variedad determinada, un tensor que dependiese solamente de estas $g$ y de sus derivadas, representaría una propiedad de la variedad, independiente del sistema de coordenadas. Se deduce que el único tensor posible es el tensor de Riemann-Christoffel

$$R^{\rho}_{\mu\sigma\tau} = \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \left\{ {\mu\tau \atop \rho} \right\} - \left\{ {\mu\sigma \atop \alpha} \right\} \left\{ {\alpha\tau \atop \rho} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_{\tau}} \left\{ {\mu\sigma \atop \rho} \right\} + \left\{ {\mu\tau \atop \alpha} \right\} \left\{ {\alpha\sigma \atop \rho} \right\}$$

Contrayendo el tensor Riemann-Christoffel con respecto a los índices $\tau$ y $\rho$ y después cambiando $\sigma$ por $\nu$, queda el tensor de *Ricci*

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left\{ {\mu\tau \atop \tau} \right\} - \left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\} \left\{ {\alpha\tau \atop \tau} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\} + \left\{ {\mu\alpha \atop \beta} \right\} \left\{ {\beta\nu \atop \alpha} \right\}$$

Debido a que

$$\left\{ {\mu\tau \atop \tau} \right\} = \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x_{\mu}}, \quad \text{entonces}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} - \left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\} \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\} + \left\{ {\mu\alpha \atop \beta} \right\} \left\{ {\beta\nu \atop \alpha} \right\}$$

El escalar $R$ deducido del tensor de Ricci representa el valor de la curvatura de una superficie, en este caso representaría el valor de la curvatura del espacio, el cual vale

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

**Tensor de Materia-Energía:** Como veremos más adelante las propiedades del campo gravitatorio están relacionadas con el *tensor materia-energía* del cual nos vamos a ocupar a continuación.
Formemos el tensor $T_\mu^\nu$ junto con los tensores $T_{\mu\sigma}$ y $T^{\nu\sigma}$ por medio de

$$T_\mu^\nu = g^{\nu\sigma}T_{\mu\sigma} = g_{\mu\sigma}T^{\nu\sigma} = g_{\mu\sigma}\rho_0\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}, \quad \text{i.e.}$$
$$T_\mu^\nu = g_{\mu\sigma}\rho_0\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}$$

donde $\rho_0$ representa la densidad de una pequeña porción de materia, valuada en medida natural (densidad propia), es decir, referida a un sistema de coordenadas unido a dicha materia. Ahora defina

$$u = \frac{dx}{dt} \quad v = \frac{dy}{dt} \quad w = \frac{dz}{dt}$$
$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$
$$\frac{ds^2}{dt^2} = c^2 - (\frac{dx}{dt})^2 - (\frac{dy}{dt})^2 - (\frac{dz}{dt})^2 = c^2 - u^2 - v^2 - w^2 = c^2(1 - \frac{u^2+v^2+w^2}{c^2})$$
$$(\frac{ds}{dt})^2 = c^2(1-\beta^2) \tag{13.1}$$

Sabemos por la relatividad especial que $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$ y $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$, entonces

$$\rho = \frac{m}{l^3} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}/l_0^3(1-\beta^2)^{3/2} = \frac{m_0}{l_0^3}(1-\beta^2)^{-1/2}(1-\beta^2)^{-3/2} = \rho_0(1-\beta^2)^{-1}$$
$$\rho = \rho_0(1-\beta^2)^{-1}$$
$$1-\beta^2 = \frac{\rho_0}{\rho}$$

substituyendo en (13.1) quedará

$$(\frac{ds}{dt})^2 = c^2\frac{\rho_0}{\rho}$$

entonces

$$\rho_0 = \frac{1}{c^2}\rho(\frac{ds}{dt})^2$$

asi que el tensor $T_\mu^\nu = g_{\mu\sigma}\rho_0\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}$ toma la siguiente forma

$$T_\mu^\nu = g_{\mu\sigma}\frac{1}{c^2}\rho(\frac{ds}{dt})^2\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}$$
$$T_\mu^\nu = \frac{1}{c^2}g_{\mu\sigma}\rho\frac{dx_\sigma}{dt}\frac{dx_\nu}{dt}$$

Las componentes del tensor $T_\mu^\nu$ son

$$T_\mu^\nu = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 & T_4^1 \\ T_1^2 & T_2^2 & T_3^2 & T_4^2 \\ T_1^3 & T_2^3 & T_3^3 & T_4^3 \\ T_1^4 & T_2^4 & T_3^4 & T_4^4 \end{pmatrix}$$

donde por ejemplo

$$T_1^1 = \frac{1}{c^2}g_{1\sigma}\rho\frac{dx_\sigma}{dt}\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{c^2}g_{11}\rho\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_1}{dt} + \frac{1}{c^2}g_{12}\rho\frac{dx_2}{dt}\frac{dx_1}{dt} + \frac{1}{c^2}g_{13}\rho\frac{dx_3}{dt}\frac{dx_1}{dt} + \frac{1}{c^2}g_{14}\rho\frac{dx_4}{dt}\frac{dx_1}{dt}$$

pero teniendo en cuenta los valores de $g_{\mu\sigma}$ para un sistema de galileo

$$g_{\nu_\sigma} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir $g_{\mu\sigma} = 0$ si $\mu \neq \sigma$, tenemos entonces

$$T_1^1 = \frac{1}{c^2} g_{11} \rho (\frac{dx_1}{dt})^2 = -\frac{1}{c^2} \rho u^2 + 0 + 0 + 0 \,,$$
$$T_1^1 = -\frac{1}{c^2} \rho u^2$$

calculando $T_2^1$,

$$T_2^1 = \frac{1}{c^2} g_{2\sigma} \rho \frac{dx_\sigma}{dt} \frac{dx_1}{dt} = 0 + \frac{1}{c^2} g_{22} \rho \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_1}{dt} + 0 + 0 \,,$$
$$T_2^1 = -\frac{1}{c^2} \rho v u$$

calculando $T_3^1$,

$$T_3^1 = \frac{1}{c^2} g_{3\sigma} \rho \frac{dx_\sigma}{dt} \frac{dx_1}{dt} = 0 + 0 + \frac{1}{c^2} g_{33} \rho \frac{dx_3}{dt} \frac{dx_1}{dt} + 0 \,,$$
$$T_3^1 = -\frac{1}{c^2} \rho w u$$

calculando $T_4^1$,

$$T_4^1 = \frac{1}{c^2} g_{4\sigma} \rho \frac{dx_\sigma}{dt} \frac{dx_1}{dt} = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{c^2} g_{44} \rho \frac{dx_4}{dt} \frac{dx_1}{dt} \,,$$
$$T_4^1 = \frac{1}{c} \rho u$$

calculando $T_1^2$,

$$T_1^2 = \frac{1}{c^2} g_{1\sigma} \rho \frac{dx_\sigma}{dt} \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{c^2} g_{11} \rho \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + 0 + 0 + 0$$
$$T_1^2 = -\frac{1}{c^2} \rho u v \,,$$

y asi sucesivamente hasta obtener los 16 componentes

$$T_\mu^\nu = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c^2}\rho u^2 & -\frac{1}{c^2}\rho v u & -\frac{1}{c^2}\rho w u & \frac{1}{c}\rho u \\ -\frac{1}{c^2}\rho u v & -\frac{1}{c^2}\rho v^2 & -\frac{1}{c^2}\rho w v & \frac{1}{c}\rho v \\ -\frac{1}{c^2}\rho u w & -\frac{1}{c^2}\rho v w & -\frac{1}{c^2}\rho w^2 & \frac{1}{c}\rho w \\ -\frac{1}{c^2}\rho u & -\frac{1}{c^2}\rho v & -\frac{1}{c^2}\rho w & \rho \end{pmatrix}$$

Consideremos las ecuaciones contenidas en $\dfrac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x_\nu} = 0$ (Divergencia del *tensor materia-energía*) haciendo $\mu = 4$

$$\frac{\partial T_4^\nu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial T_4^1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_4^2}{\partial x_2} + \frac{\partial T_4^3}{\partial x_3} + \frac{\partial T_4^4}{\partial x_4}$$

$$= \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

nos resulta la llamada ecuación de continuidad en la mecánica de flúidos, etc.

## 14. Teoria de la Relatividad General

El principio de la relatividad restringido exige que se refieran todos los hechos a ejes o sistemas de Galileo, es decir, a ejes respecto a los cuales no exista algún campo acelerado.
Tal condición supone hallarse indefinidamente alejado de toda masa material a fin de que no produzca campo gravitatorio alguno, por lo que los casos en que rigurosamente tenga aplicación serán limitadísimos, por no decir nulos.
Por otra parte, el principio restringido de la relatividad excluye todo fenómeno gravitatorio y, en cambio, nos muestra una inercia para la energía radiante, lo que equivale a una estrecha relación entre la gravitación universal y los fenómenos electromagnéticos.
Se vislumbra, de todo lo apuntado, la imperiosa necesidad de buscar una generalización del principio de relatividad.
*Identidad entre la masa gravitatoria y la masa inerte - Principio de Equivalencia -*
Sabemos que en un campo gravitatorio cualquiera todos los cuerpos se mueven con idéntica aceleración independientemente de su masa.

$$fuerza = masa\ inerte\ *\ aceleracion$$

también

$$fuerza = masa\ gravitatoria\ *\ intensidad\ del\ campo$$

de donde

$$aceleracion = \frac{masa\ gravitatoria}{masa\ inerte}\ intensidad\ del\ campo$$

Como la experiencia nos dice que la aceleración es idéntica para todos los cuerpos independientemente de su naturaleza y estado del cuerpo, la relación entre las dos masas puede reducirse a la unidad por una conveniente elección de unidades.
*Así, la masa gravitatoria y la masa inerte de un cuerpo son idénticos.* La misma cantidad de un cuerpo se manifiesta como inercia que como peso.
Aún hay más; un campo gravitatorio y un campo de inercia (uniformemente acelerado) son mecánicamente equivalentes.
E.g. imaginemonos transportados a una región libre de campo gravitatorio alguno, encontrandonos dentro de un laboratorio provisto de todo lo que necesitamos, también el laboratorio tienen un gancho por fuera (en el techo), a este gancho se encuentra amarrada una cuerda. Un ser extraordinario comienza a jalar la cuerda con una aceleración igua a 9.81 $m/s^2$, todos los objetos incluyendonos a nosotros mismos dentro del laboratorio comenzaremos a "caer" (según nuestra perspectiva), diríamos que nos encontramos en el campo gravitatorio terrestre, más aún, si nos damos cuenta de la cuerda, deduciremos que la tensión en ella, es debido a que el laboratorio se encuentra colgado y ejerciendo una fuerza (el peso) a la cuerda debido al campo gravitatorio. Un observador exterior al laboratorio que estudie el hecho desde un sistema de Galileo (i.e sistema de referencia moviendose con velocidad constante, sin aceleración) dirá que la tensión de la cuerda es la fuerza de inercia determinada por su masa inerte, debido a la aceleración del sistema.
Ahora, suponga que el laboratorio lo transportamos a la tierra y lo dejamos caer desde una gran altura, inmediatamente después, nosotros y todos los demás objetos en el interior del laboratorio comenzaremos a flotar libremente, interpretaremos ésto como que posiblemente nos hallamos en una región en el espacio libre de campo gravitatorio alguno. Un sistema de ejes invariablemente unido al laboratorio será un sistema de Galileo, aunque tenga un movimiento acelerado respecto a otro unido a la Tierra, con relación al que existe campo gravitatorio.
**La completa identidad entre un campo de fuerza gravitatorio y un campo de inercia constituyen el llamado principio de equivalencia:**
*El principio de equivalencia nos permitirá estudiar fácilmente las propiedades de un campo gravitatorio de*

*una manera puramente teórica. Supongamos que se conozca en un espacio tiempo la marcha de un fenómeno referido a un sistema de Galileo $O$, un simple cambio de coordenadas nos permitirá estudiar las leyes en otro sistema $O'$ acelerado con respecto al primero, pero como en $O'$ existe un campo de inercia,* **equivalente** *a un campo gravitatorio, podemos deducir la influencia que la gravitación tiene sobre el fenómeno estudiado. La equivalencia entre los campos de inercia (mov. acelerado) y gravitatorio nos permite formular de una manera más concreta el principio general de relatividad. Si respecto a un sistema de ejes cualquiera expresamos las leyes de un fenómeno natural por medio de ecuaciones que ímplicita o explícitamente contengan cantidades determinativas del campo, al cambiar de sistema de referencia obtendremos una nueva estructura del campo, pero las nuevas ecuaciones resultantes deberán conservar la misma forma (deberán ser covariantes).*

Un campo de inercia (en caída libre) puede localmente anular completamente un campo gravitatorio, pero no para toda la región del espacio.
En la naturaleza existen *campos reductibles* o campos cuya acción puede anularse simultáneamente en todos los puntos del espacio, por un cambio de ejes de coordenadas; tal es el campo debido a la fuerza centrífuga que se anula refiriéndolo a unos ejes que tengan un movimiento de rotación igual y en sentido contrario al que produce la fuerza centrífuga; en cambio ningún campo de gravitación producido por la materia puede anularse totalmente para ningún sistema de ejes; la anulación puede verificarse sólo en una región indefinidamente pequeña.
Recuerde las siguientes definiciones:

**Definición 14.1.** *Los espacios en que se da una ley para medir la distancia $ds$ entre dos puntos de coordenadas $x\mu, x\mu + dx\mu$ y por tanto, por integración, la longitud de una curva cualquiera $\int ds = s$, se llaman espacios métricos.*

**Definición 14.2.** *En toda región del espacio que referida a un sistema de Galileo no exista campo de fuerza alguna, podemos elegir nuevos sistemas de Galileo en mov. rectilíneo y uniforme respecto al primero; en ellas son válidos los principios de la geometría de Euclides; la distancia elemental viene dada por*

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

*el movimiento de un punto es rectilíneo y uniforme, este espacio es llamado espacio Euclideano (métrica Euclideana).*

**Definición 14.3.** *De manera análoga, un espacio-tiempo que contenga todos estos espacios Euclídeos de tres dimensiones, viene caracterizado por ser rectilíneas sus líneas de universo; en toda esta región se aplican las leyes de la relatividad restringida; este espacio es llamado de Lorentz-Minkowski (métrica cuasi-Euclideana).*

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2dt^2$$

*La teoría de la relatividad especial supone que el espacio-tiempo es un espacio de Lorentz-Minkowski. Este elemento de arco tiene la misma expresión en todos los puntos del espacio.*

**Definición 14.4.** *Defina $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$, donde $i = \sqrt{-1}$, entonces, los espacios métricos en los cuales la distancia elemental se define como*

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 + g_{44}dx_4^2 \\ &+ 2g_{12}dx_1dx_2 + 2g_{13}dx_1dx_3 + 2g_{14}dx_1dx_4 \\ &+ 2g_{23}dx_2dx_3 + 2g_{24}dx_2dx_4 + 2g_{34}dx_3dx_4 \\ &= g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu \quad \textit{esta última igualdad en notación tensorial} \end{aligned} \tag{14.1}$$

*donde las $g_{\mu\nu}$ son funciones de las coordenadas $x\mu$ que se supone admiten derivadas parciales continuas $g_{\mu\nu} = \partial\vec{r}/\partial\mu \cdot \partial\vec{r}/\partial\nu$, $\vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ y $g_{\mu\nu} \neq 0$, se llaman espacios de Riemann (métrica de Riemann). En los eapacios donde existe un campo gravitatorio no puede aplicarse la geometría de Euclides, debido a la curvatura que la gravedad induce al espacio-tiempo, e.g. dos rectas paralelas puestas sobre una superficie curva llegan a intersectarse en algún punto de dicha superficie, de tal manera que la métrica que se utiliza para caracterizar un espacio en presencia de un campo gravitatorio es el espacio de Riemann.*

El siguiente ejemplo nos demostrará esta afirmación:

14.1. **Comportamiento de relojes y reglas en un sistema de referencia rotatorio:** Sea $O$ un sistema de referencia inercial (Galileano) donde los resultados de la teoría de la relatividad restringida aplican. Sea $O'$ un sistema de referencia el cual se encuentra en rotación uniforme con respecto al sistema $O$, con una velocidad angular $\omega$ alrededor del eje común $Z$. Para ser más precisos, imagine a $O'$ como un disco circular plano, el cual rota uniformemente en su propio plano alrededor de su centro.
Un observador que está situado excentricamente (no en el centro) en el disco $O'$ es sensible a una fuerza que actúa en la dirección radial, y la cual puede ser interpretada como un efecto de inercia (fuerza centrífuga) por un observador en reposo situado en el sistema original de referencia $O$. Pero el observador en el disco puede considerar su disco como un sistema de referencia "en reposo" (el podrá justificar ésto basandose en el principio general de la relatividad). La fuerza actuando en él, y así como en todos los demás cuerpos que se encuentran en reposo con respecto al disco, puede ser considerada como el efecto de un campo gravitatorio. El observador en $O'$ realiza experimentos en su disco circular con relojes y reglas. Para iniciar, el sitúa uno de dos relojes idénticos en el centro y el otro a una distancia $r$ del centro del disco, de manera que ambos están en reposo uno con respecto al otro. Desde el sistema de referencia de Galileo $O$, el reloj en el centro del disco ($r = 0$) no tiene velocidad transversal $v = 0$, mientras que el que se encuentra a una distancia $r \neq 0$ se encuentra en movimiento con una velocidad transversal $v = r\omega$. De acuedo con la relatividad restringida este reloj de $O'$ caminarán más lentamente con respecto al observador en el sistema $O$. Un intervalo de tiempo $dt_0$ en $O'$ aparecerá como

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1 - (r\omega)^2/c^2}}$$

en $O$. Pero no solo eso, es obvio que el mismo efecto sería notado por un observador sentado en el centro del disco rotatorio!!! Asi en el disco circular, o para hacer el caso más general, en cualquier campo gravitatorio, un reloj irá más rápido o menos rápido, de acuerdo a la posición en la cual el reloj está situado, por lo que el tiempo pierde su homogeneidad en el sistema $O'$ (ésto significa que en el disco los relojes de diferentes observadores que se alejan del centro caminan más lentamente con respecto al observador anterior).
Vamos ahora a considerar mediciones espaciales efectuadas por un observador en $O'$. Claramente, la medida de un elemento radial, $dr$, será la misma a la correspondendiente medida $dR$ efectuada en el sistema $O$ (esto debido a que el elemento radial se encuentra colocado ortogonalmente al movimiento de rotación del disco, por lo que no tendrá efecto la contracción relativista); de manera que, $dr = dR$. Un elemento lineal transversal $dl_0$ a una distancia $r$ del centro del disco rotatorio (en dirección del movimiento de rotación) medirá más en $O'$ que en $O$, debido a que la medida correspondiente del elemento en $O$ será igual a

$$dl = dl_0\sqrt{1 - (r\omega)^2/c^2}$$

Pero no solo eso, es obvio que el mismo efecto sería notado por un observador sentado en el centro del disco rotatorio!!! Asi en el disco circular, o para hacer el caso más general, en cualquier campo gravitatorio, un elemento lineal transversal mediría de menos a m'as, de acuerdo a la posición donde el elemento sea considerado, por lo que el espacio pierde su homogeniedad en el sistema $O'$.
Podemos ahora obtener la medida del elemento lineal que une los puntos $(r, \theta)$ y $(r + dr, \theta + d\theta)$ en el sistema $O'$ ($r$ es la coordenada radial y $\theta$ es la coordenada transversal en el sistema de referencia $O'$), el cual es

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + dl_0^2 \\ &= dr^2 + \frac{dl^2}{1 - (r\omega)^2/c^2} \quad \text{de donde } dl = R\,d\theta = r\,d\theta \\ &= dr^2 + \frac{r^2\,d\theta^2}{1 - (r\omega)^2/c^2} \end{aligned}$$

La expresión anterior para elemento $ds^2$ no es la forma Euclideana ($ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$). Consecuentemente, la geometría del espacio como fué determinada por medio de mediciones de elementos en reposo en el sistema $O'$, no es *Euclideana*. En partícular, el cociente entre el perímetro de un círculo ($dr = 0$) a su radio ($d\theta = 0$)

no es $2\pi$: Para encontrar el valor del perímetro del disco, nos movemos de tal forma que $dr = 0$, entonces

$$Perimetro = \int_0^{2\pi} ds|_{dr=0} = \frac{2\pi r}{\sqrt{1-(r\omega)^2/c^2}}$$

De la misma manera para encontrar el valor del radio nos movemos de tal forma que $d\theta = 0$,

$$Radio = \int_0^{r} ds\,|_{d\theta=0} = r$$

por lo que

$$\frac{perimetro}{radio} = \frac{2\pi r/\sqrt{1-(r\omega)^2/c^2}}{r} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-(r\omega)^2/c^2}} > 2\pi \tag{14.2}$$

Para hacer las peor las cosas, este cociente ni siquiera es constante; este es una variable del espacio! Asi, si incrementamos el radio del círculo por un factor pre-asignado, su perímetro se incrementará en un factor diferente. Por lo que para el observador en el sistema $O'$ el espacio no es ni homogeneo ni isotrópico (diferente conforme a la dirección seleccionada). La consecuencia a que nos conduce el ejemplo anterior, es que en campos gravitatorios queda **inadmisible la definición de coordenadas** asi del espacio como de tiempo que se ha empleado en la teoría de la relatividad estringida. El continuo espacio-tiempo del caso general (en un campo gravitatorio) debe considerarse continuo **no euclídeo**

14.2. **Ecuaciones del Campo gravitatorio según Einstein.** La teoría de la relatividad general conserva la hipótesis fundamental de que el espacio-tiempo es un espacio de Riemann, pero supone que la forma del elemento de arco depende de la distribución de la materia y que, por tanto, debe determinarse en cada caso. Es decir, los coeficientes $g_{\mu\nu}$ (en número de 10 puesto que n=4) de la forma fundamental (14.1) no puede darse de una vez para siempre, sino que debe calcularse por medio de ciertas ecuaciones, las cuales dependen de la distribución de la materia y de la energía (conceptos equivalentes) en el espacio.
Para determinar estas ecuaciones, Einstein parte de las siguientes condiciones:

a) Deben ser tensoriales. Además, tratándose de 10 funciones incógnitas, se deben tener 10 ecuaciones, con lo cual resulta que los primeros miembros de las ecuaciones deben ser componentes de un tensor de 10 componentes, en el espacio de 4 dimensiones la única manera de que esto sea posible es que se trate de un tensor simétrico de segundo orden; representémoslo por $G_{\mu\nu}$. Por analogía con la clásica ecuación de Poisson, $G_{\mu\nu}$ debe contener a las derivadas parciales segundas de las funciones incógnitas $g_{\mu\nu}$ (llamadas funciones potenciales gravitatorias), de ser posible linealmente por razones de simplicidad, entonces

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

b) También por analogía con la ecuación de Poisson:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \chi T_{\mu\nu}, \\ G_{\mu\nu} &\equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \chi T_{\mu\nu} \quad \text{o simplemente} \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= \chi T_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{14.3}$$

En la teoría ordinaria del potencial la presencia de la materia determina el campo gravitatorio y el potencial $\phi$ en cada punto, dicho potencial $\phi$ satisface a las relaciones de Laplace y de Poisson: $\nabla^2\phi = 0 \quad \nabla^2\phi = 4\pi G\rho$. Aquí $\chi$ es una constante que se espera ser universal (de hecho demostraremos en la siguiente sección que $\chi = 8\pi G/c^2$) y $T_{\mu\nu}$ el tensor simétrico, *materia-energía*, que depende de la distribución de la materia y de la energía en el espacio.
La última ecuación como dijimos corresponde a la de Poisson en la teoría newtoniana de la gravitación, donde $G_{\mu\nu}$ equivaldría a $\nabla^2\phi$, $\chi$ a la constante $4\pi G$ y $T_{\mu\nu}$ a la densidad $\rho$. Substituyendo

el valor real de la constante $\chi$ (que calcularemos más adelante) queda

(14.4) $$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}.$$

Para poner las ecuaciones (14.4) en forma mixta, cambiamos primeramente $\nu$ por $m$,

$$G_{\mu m} \equiv R_{\mu m} - \frac{1}{2}g_{\mu m}R = \frac{8\pi G}{c^2}\,T_{\mu m}\,, \quad \text{multiplicando por } g^{\nu m},$$

$$g^{\nu m}G_{\mu m} \equiv g^{\nu m}R_{\mu m} - \frac{1}{2}g^{\nu m}g_{\mu m}R = \frac{8\pi G}{c^2}\,g^{\nu m}T_{\mu m}\,, \quad \text{es decir,}$$

(14.5) $$G^{\nu}_{\mu} \equiv R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}R = \frac{8\pi G}{c^2}\,T^{\nu}_{\mu}$$

c) El principio de la conservación de la energía obliga a que la divergencia de $T^{\nu}_{\mu}$ sea nula, lo que lleva consigo, según (14.5), a que también sea nula la divergencia de $G^{\nu}_{\mu}$ ($Div(G^{\nu}_{\mu}) = 0$), y efectivamente como se comprueba y que por razones de espacio omitimos, la divergencia del tensor de Einstein

$$Div(G^{\nu}_{\mu}) = Div(R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}R) = 0$$

Lo que demuestra la correcta elección del tensor $G^{\nu}_{\mu}$ para representar analíticamente el campo gravitatorio. Por otro lado, efectuando una contracción a (14.5), es decir haciendo $\nu = \mu$, se tiene

$$G = G^{\mu}_{\mu} = R - \frac{1}{2}\cdot 4R = -R = \frac{8\pi G}{c^2}\,T,$$

es decir,

$$\begin{aligned} R &= -\frac{8\pi G}{c^2}\,T \\ R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}R &= \frac{8\pi G}{c^2}\,T^{\nu}_{\mu} \\ R^{\nu}_{\mu} &= \frac{8\pi G}{c^2}\,T^{\nu}_{\mu} + \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}R \\ R^{\nu}_{\mu} &= \frac{8\pi G}{c^2}\,T^{\nu}_{\mu} + \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}\big(-\frac{8\pi G}{c^2}\,T\big) \\ R^{\nu}_{\mu} &= \frac{8\pi G}{c^2}\big(T^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}T\big) \end{aligned}$$

o en forma contravariante (cambiamos $\mu$ por $m$, y despues multiplicamos por $g_{\mu m}$)

(14.6) $$\boxed{R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2}\big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\big)}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el *tensor de Ricci*, $R$ es el escalar de curvatura del espacio y $T$ es el escalar que depende de la distribución de la materia y la energía. Asi, (14.6) representa *las ecuaciones de la gravitación de Einstein en el interior de la materia*. De estas 10 ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, deben determinarse las $g_{\mu\nu}$, con las cuales se tendrá el elemento de arco del espacio-tiempo $ds$ (14.1).

Para puntos fuera de la materia y energía se tiene $T_{\mu\nu} = 0$ y $T = R = 0$ (al estar en una región libre de materia y energía tanto $T$, asi como la curvatura del espacio valen cero), por lo que las ecuaciones de la gravitación toman la forma simple

(14.7) $$\boxed{R_{\mu\nu} = 0}$$

Corresponde a la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi = 0$ en la teoría newtoniana de la gravitación.

Podría pensarse que el espacio es plano debido a $R_{\mu\nu} = 0$, pero no es así, lo único que si es cierto es que $R^{\rho}_{\mu\sigma\tau} = 0$ *ssi el espacio es euclideano*, donde $R^{\rho}_{\mu\sigma\tau} = 0$ es el tensor de Riemann-Christoffel y también *espacio euclideano* $\Longrightarrow$ $R_{\mu\nu} = 0$, pero $R_{\mu\nu} = 0$ *no implica espacio euclideano*.
Conocido el elemento de arco $ds$ se puede estudiar toda la geometría del espacio-tiempo. Falta entonces - y este es el mérito fundamental de Einstein - interpretar físicamente esta geometría estableciendo una correspondencia entre los elementos geométricos del espacio-tiempo y los fenómenos físicos del espacio tridimensional. Por ejemplo, unos primeros postulados para establecer esta correspondencia son:

- Si el punto se mueve libremente, describirá una geodésica del espacio-tiempo.
- Si el punto se mueve con la velocidad de la luz, la geodésica que describe es de longitud nula (o sea, $ds = 0$) del espacio-tiempo.

Posteriormente se vió que estos postulados eran consecuencia de las ecuaciones fundamentales (14.4).

14.3. **Ecuaciones de la dinámica clásica como un caso partícular de las ecuaciones de la geodésica.** La meta final en esta sección es deducir el valor de la constante $\chi$ aparecida en las ecuaciones de Einstein. Para un universo euclídeo $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ y $g_{44} = 1$, además $g_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$ (valores galileanos). En el universo real los campos de gravitación son débiles, de manera que los valores de $g_{\mu\nu}$ difieren poco de los valores galileanos. Además, supondremos que $g_{\mu\nu} = -1$ cuando $r \to \infty$ para $\mu = \nu = 1, 2, 3$ y $g_{44} = 1$ cuando $r \to \infty$, puesto que para $r$ muy grande se espera que el campo gravitatorio sea prácticamente cero. Ahora

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2$$

donde $x_4 = ct$, entonces,

$$1 = -\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2$$

recuerde que

$$\frac{dx_\alpha}{ds} = \frac{dx_\alpha}{dt}\frac{dt}{ds} \approx 0 \quad \text{para } \alpha = 1, 2, 3$$

ya que las velocidades reales $\dfrac{dx_\alpha}{dt}$ para $\alpha = 1, 2, 3$ son siempre pequeñas en comparación con la velocidad de la luz. Para $\alpha = 4$ tenemos

$$\frac{dx_4}{ds} = \frac{dx_4}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d(ct)}{dt}\frac{dt}{ds} = c\frac{dt}{dt}\frac{dt}{ds} = c\frac{dt}{ds} \neq 0,$$

entonces,

$$\begin{aligned}
1 &= -\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2 \\
1 &\approx -0 - 0 - 0 + \left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2 \\
\frac{dx_4}{ds} &\approx 1
\end{aligned}$$

también,

$$\begin{aligned}
ds &\approx dx_4 \\
ds &\approx cdt
\end{aligned}$$

Substituyendo estos valores de velocidad en las ecuaciones de las líneas geodésicas, tenemos

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} + \left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\} \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} = -\left\{{\mu\nu \atop \tau}\right\}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}$$
$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} = -\left\{{44 \atop \tau}\right\}$$
$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} = -g^{\tau\sigma}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\sigma}\right)$$
$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} = -g^{\tau\sigma}\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\sigma}\right)$$

substituyendo $ds \approx cdt$ en la expresión anterior,

$$\frac{d^2x_\tau}{c^2dt^2} = -g^{\tau\sigma}\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\sigma}\right),$$
$$-\frac{2}{c^2}\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = -2g^{\tau\sigma}\frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x_4} + g^{\tau\sigma}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\sigma}$$

Si suponemos que el campo es cuasi-estático, es decir, $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_4} = 0$ (no hay cambio con respecto al tiempo), y añadimos las condiciones $g^{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$ y $g_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$ y las nombramos como (14.3), entonces,

$$-\frac{2}{c^2}\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = g^{\tau\sigma}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\sigma} \quad \sigma = 1, 2, 3.$$
$$-\frac{2}{c^2}\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = g^{\tau 1}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} + g^{\tau 2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_2} + g^{\tau 3}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_3},$$

por las condiciones (14.3), tenemos

$$-\frac{2}{c^2}\frac{d^2x_1}{dt^2} = g^{11}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} + 0 + 0 = -\frac{\partial g_{44}}{\partial x_1}$$
$$-\frac{2}{c^2}\frac{d^2x_2}{dt^2} = 0 + g^{22}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_2} + 0 = -\frac{\partial g_{44}}{\partial x_2}$$
$$-\frac{2}{c^2}\frac{d^2x_3}{dt^2} = 0 + 0 + g^{33}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_3} = -\frac{\partial g_{44}}{\partial x_3},$$

i.e.,

$$\frac{2}{c^2}\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\sigma} \quad \sigma = 1, 2, 3$$

entonces,

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = \frac{\partial \frac{c^2}{2} g_{44}}{\partial x_\sigma} \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

Compare ésto con $\nabla\phi = F = ma$, $\nabla\phi = ma$, entonces, $\nabla\phi = a$ cuando definimos al potencial como $\phi = \frac{GM}{r}$, en lugar de $\phi = \frac{GMm}{r}$. Por lo tanto, podemos identificar a $\frac{c^2}{2}g_{44}$ como el potencial gravitatorio $\phi$ de la mecánica de Newton, entonces,

$$\phi = \frac{c^2}{2}g_{44} + c$$

Para determinar la constante $c$, sabemos que cuando $r \to \infty$, $g_{44} = 1$ y $\phi = 0$, asi que, $0 = \dfrac{c^2}{2} + c$, por lo tanto $c = -\frac{c^2}{2}$,

$$\phi = \frac{c^2}{2} g_{44} - \frac{c^2}{2} = \frac{c^2}{2}(g_{44} - 1),$$

entonces,

$$g_{44} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

Con lo encontrado hasta ahora, estamos cerca de averiguar el valor de la constante $\chi$ que aparece en las ecuaciones de Einstein $R_{\mu\nu} = -\chi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T)$.
Del tensor de materia $T_{\mu\nu}$ y dentro de los límites de aproximación hasta ahora utilizados, las componentes del tensor se anulan, excepto $T_{44}$ que queda reducida a la densidad $\rho$, además es fácil ver que $T$ queda reducida también a la densidad $\rho$:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= T^m_\nu g_{\mu m} \\ T_{44} &= T^4_4 g_{44} \\ T_{44} &= (\rho)(1) = \rho. \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} T^\nu_\mu &= \frac{1}{c^2} g_{\mu\sigma} \rho \frac{dx_\sigma}{dt} \frac{dx_\nu}{dt}, \\ T^\nu_\nu &= T = \frac{1}{c^2} g_{\nu\sigma} \rho \frac{dx_\sigma}{dt} \frac{dx_\nu}{dt} \end{aligned}$$

pero por (14.3), tenemos,

$$T = \frac{1}{c^2} g_{\sigma\sigma} \rho \left( \frac{dx_\sigma}{dt} \right)^2 \quad \text{pero } \frac{dx_\sigma}{dt} \approx 0 \quad \text{para } \sigma = 1, 2, 3,$$

entonces,

$$T = \frac{1}{c^2} g_{44} \rho \left( \frac{dx_4}{dt} \right)^2 = \frac{1}{c^2} \rho \left( \frac{d(ct)}{dt} \right)^2 = \frac{c^2}{c^2} \rho \left( \frac{dt}{dt} \right)^2 = \rho$$

esto último ya que $g_{44} = 1$, por lo tanto,

$$T = \rho$$

Haciendo $\mu = \nu = 4$ en $R_{\mu\nu} = -\chi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T)$, queda

$$\begin{aligned} R_{44} &= -\chi(T_{44} - \frac{1}{2} g_{44} T) \\ R_{44} &= -\chi(\rho - \frac{1}{2}\rho) = -\frac{1}{2}\chi\rho \end{aligned}$$

por otro lado, de la definición de $R_{\mu\nu}$, tenemos

$$R_{44} = -\frac{\partial \left\{ {44 \atop \alpha} \right\}}{\partial x_\alpha} + \left\{ {4\alpha \atop \beta} \right\} \left\{ {\beta 4 \atop \alpha} \right\} + \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x_4^2} - \left\{ {44 \atop \alpha} \right\} \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{2}\chi\rho$$

pero $\sqrt{-g} = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
R_{44} &= -\frac{\partial \left\{ {44 \atop \alpha} \right\}}{\partial x_\alpha} + \left\{ {4\alpha \atop \beta} \right\} \left\{ {\beta 4 \atop \alpha} \right\} = -\frac{1}{2}\chi\rho \\
&= -\frac{\partial \left\{ {44 \atop \alpha} \right\}}{\partial x_\alpha} + g^{\beta\sigma}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{4\alpha}}{\partial x_\sigma}\right) g^{\alpha\sigma}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_{\beta 4}}{\partial x_\sigma}\right) = -\frac{1}{2}\chi\rho
\end{aligned}$$

recuerde las condiciones (14.3), entonces,

$$\begin{aligned}
R_{44} &= -\frac{\partial \left\{ {44 \atop \alpha} \right\}}{\partial x_\alpha} + g^{44}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{44}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_4}\right) g^{44}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{44}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{44}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_4}\right) = -\frac{1}{2}\chi\rho \\
&= -\frac{\partial \left\{ {44 \atop \alpha} \right\}}{\partial x_\alpha} + 0 + 0 = -\frac{1}{2}\chi\rho \\
&= -\frac{\partial \left\{ {44 \atop 1} \right\}}{\partial x_1} - \frac{\partial \left\{ {44 \atop 2} \right\}}{\partial x_2} - \frac{\partial \left\{ {44 \atop 3} \right\}}{\partial x_3} - \frac{\partial \left\{ {44 \atop 4} \right\}}{\partial x_4} = -\frac{1}{2}\chi\rho \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_1} g^{1\sigma}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\sigma}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2} g^{2\sigma}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\sigma}\right) \\
&- \frac{\partial}{\partial x_3} g^{3\sigma}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\sigma}\right) - \frac{\partial}{\partial x_4} g^{4\sigma}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\sigma}\right) = -\frac{1}{2}\chi\rho
\end{aligned}$$

De las condiciones (14.3), no vemos forzados a considerar solo aquellas situaciones donde los superíndices de $g^{\mu\nu}$ sean iguales, entonces,

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial}{\partial x_1} g^{11}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{41}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{41}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2} g^{22}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{42}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{42}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_2}\right) \\
&- \frac{\partial}{\partial x_3} g^{33}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{43}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{43}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_4} g^{44}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{44}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{44}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_4}\right) = -\frac{1}{2}\chi\rho
\end{aligned}$$

y de nueva cuenta apelando a las condiciones (14.3), obtenemos

$$R_{44} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2} = -\frac{1}{2}\chi\rho$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2} &= \frac{1}{2}\chi\rho \\
\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2} &= \chi\rho
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 g_{44} = \chi\rho, \quad \text{donde} \;\; g_{44} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}, \quad \text{entonces,}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) &= \chi\rho \\
0 + \frac{2}{c^2}\nabla^2\phi &= \chi\rho \\
\frac{2}{c^2}\nabla^2\phi &= \chi\rho \\
\nabla^2\phi &= \frac{c^2}{2}\chi\rho
\end{aligned}$$

comparando ésta última expresión con la correspondiente de la de la teoría de Newton: $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$, entonces,

$$\frac{c^2}{2}\chi\rho = 4\pi G\rho$$

obteniendo finalmente la constante $\chi$

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^2}$$

también recuerde que el potencial $\phi$ en la teoría de Newton viene dado por $\phi - \dfrac{GM}{r}$, entonces,

$$g_{44} = 1 + \frac{2}{c^2}\left(\frac{-GM}{r}\right) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r},$$

así que

$$m = \frac{GM}{c^2}$$

Que es la constante que obtendremos al resolver las ecuaciones de Einstein en la sección siguiente.

14.4. **Teoría General de la Relatividad en el campo creado por una estrella de masa $M$.** La teoría de la relatividad general conserva la hipótesis fundamental de que el espacio-tiempo es un espacio de Riemann, pero supone que la forma del elemento de arco depende de la distribución de la materia y que, por tanto, debe determinarse en cada caso. Es decir, los coeficientes $g_{\mu\nu}$ de la forma fundamental (14.1) no puede darse de una vez para siempre, sino que debe calcularse por medio de ciertas ecuaciones, las cuales dependen de la distribución de la materia y de la energía (conceptos equivalentes) en el espacio. Los potenciales gravitatorios del espacio-tiempo correspondiente $g_{\mu\nu}$ deben satisfacer a las condiciones $R_{\mu\nu} = 0$. Para resolver la ecuación $R_{\mu\nu} = 0$ Schwarzschild consideró las siguientes condiciones:

- El campo es estático (no cambia con el tiempo)
- El campo tiene simetría esferica
- El espacio-tiempo es vacío
- El espacio-tiempo es asintoticamente plano

El sistema de coordenadas a que referir el campo es arbitrario y queda a nuestra elección. Si el universo fuese euclídeo, el sistema de coordenadas más conveniente sería un sistema de coordenadas esférico, de manera que

$$x_1 = r \quad x_2 = \theta \quad x_3 = \phi \quad x_4 = ct$$

y el intervalo elemental correspondiente sería

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi + c^2 dt^2 \tag{14.8}$$

pero la presencia de la masa puntual, produce una distorsión del espacio-tiempo, y vamos a intentar hallar una solución de la expresión del elemento lineal referido a un conveniente sistema de coordenadas, que se reduzca a la forma (14.8), para puntos indefinidamente alejados, en los que, por desaparecer el campo gravitatorio, el universo es euclídeo.
A causa de la simetría del espacio alrededor de la masa, deben faltar términos en $drd\theta$, $drd\phi$ y $d\theta d\phi$, pues si existiesen resultaría que un cambio de signo en $d\theta$ o $d\phi$, daría para $ds$ valores diferentes y faltaría la simetría necesaria en el espacio. También deben faltar los términos en $drdt$, $d\theta dt$ y $d\phi dt$, pues de conservarse corresponderían valores diferentes de $ds$ para valores positivos o negativos de $dt$ y la historia de la partícula no sería simétrica respecto a su pasado y su futuro; el campo no sería estático por variar con el tiempo. A los restantes términos cuadrados, ensayemos de darles la siguiente forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{\beta} dr^2 - e^{\mu}(r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2) + e^{\nu} c^2 dt^2 \\ \beta &= \beta(r), \quad \mu = \mu(r), \quad \nu = \nu(r), \end{aligned}$$

también,

$$\lim_{r\to\infty} \beta(r) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} \mu(r) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} \nu(r) = 0,$$

quedando (14.8)

Dichas funciones no pueden depender de $\theta$, $\phi$ y $t$, porque faltaría la simetría del campo o del tiempo que hemos admitido y deben satisfacer las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Ahora haga $r' = re^{\mu/2}$, entonces, $r'^2 = r^2 e^{\mu}$ y

$$\begin{aligned}
dr' &= re^{\mu/2}\frac{1}{2}\,dr + e^{\mu/2}\,dr \\
dr'^2 &= (\frac{1}{2}r\mu' + 1)^2 e^{\mu}\,dr^2 = (\frac{1}{2}r'e^{-\mu/2} + 1)^2 e^{\mu}\,dr^2 \\
dr^2 &= (\frac{1}{2}r'\mu' + 1)^{-2} e^{-\mu}\,dr'^2
\end{aligned}$$

substituyendo ésto en la expresión de Schwarzschild,

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -e^{\beta}dr^2 - e^{\mu}r^2 d\theta^2 - e^{\mu}r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2) + e^{\nu}c^2 dt^2 \\
ds^2 &= -e^{\beta}(\frac{1}{2}r'e^{-\mu/2}\mu' + 1)^{-2}e^{-\mu}dr'^2 - r'^2 d\theta^2 - r'^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2) + e^{\nu}c^2 dt^2 \\
ds^2 &= -e^{\beta-\mu}(\frac{1}{2}r'e^{-\mu/2}\mu' + 1)^{-2}dr'^2 - r'^2 d\theta^2 - r'^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2) + e^{\nu}c^2 dt^2 \\
e^{\lambda} &= e^{\beta-\mu}(\frac{1}{2}r'e^{-\mu/2}\mu' + 1)^{-2} \quad \text{y} \quad r = r', \ \text{entonces,}
\end{aligned}$$

$$ds^2 = -e^{\lambda}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2 + e^{\nu}c^2 dt^2 \quad \text{Métrica de Schwarzschild.}$$

Entonces $g_{11} = -e^{\lambda}$, $g_{22} = -r^2$, $g_{33} = -r^2 \operatorname{sen}^2\theta$ y $g_{44} = e^{\nu}$ y $g_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$, recuerde que $x_4 = ct$, entonces,

$$g = \begin{vmatrix} -e^{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \operatorname{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\nu} \end{vmatrix} = -e^{(\lambda+\nu)} r^4 \operatorname{sen}^2\theta$$

Por lo tanto $-g = e^{\lambda+\nu} r^4 \operatorname{sen}^2\theta$. También sabemos que $g^{\alpha\beta} = 1/g_{\alpha\beta}$. Calculando los símbolos de Christoffel, tenemos

$$\left\{ {\sigma\tau \atop \alpha} \right\} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{\alpha\beta}}\left(\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial g_{\beta\tau}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\beta}\right)$$

recuerde (14.3), entonces,

$$\left\{ {\sigma\tau \atop \alpha} \right\} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{\alpha\alpha}}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial g_{\alpha\tau}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\alpha}\right)$$

obviamente ya sín indicar sumación (índices repetidos de Einstein). Ahora, $g_{\alpha\sigma} = g_{\alpha\tau} = g_{\sigma\tau} = 0$ si $\alpha \neq \sigma$, $\alpha \neq \tau$, $\sigma \neq \tau$, respectivamente, entonces, los únicos casos diferente de cero quedarían

$$\begin{array}{lll} \alpha = \sigma = \tau & \alpha = \tau = \sigma & \sigma = \tau = \alpha \\ \alpha = \sigma \neq \tau & \alpha = \tau \neq \sigma & \sigma = \tau \neq \alpha \end{array}$$

pero recuerde que

$$\left\{ {\sigma\tau \atop \alpha} \right\} = \left\{ {\tau\sigma \atop \alpha} \right\}$$

asi que los únicos casos posibles son

$$\alpha = \sigma = \tau \quad \alpha = \sigma \neq \tau \quad \text{ó } \alpha = \tau \neq \sigma \quad \sigma = \tau \neq \alpha,$$

es decir,

$$\left\{ {\sigma\sigma \atop \sigma} \right\}, \quad \left\{ {\sigma\tau \atop \tau} \right\}, \quad \left\{ {\sigma\sigma \atop \alpha} \right\} = \left\{ {\sigma\sigma \atop \tau} \right\}$$

enotnces,

$$\begin{aligned}
\left\{ {\sigma\sigma \atop \sigma} \right\} &= \frac{1}{g_{\sigma\sigma}}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial x_\sigma}\right)\\
\left\{ {\sigma\sigma \atop \sigma} \right\} &= \frac{1}{g_{\sigma\sigma}}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial x_\sigma}\\
\left\{ {\sigma\tau \atop \tau} \right\} &= \frac{1}{g_{\tau\tau}}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial g_{\tau\tau}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\tau}\right)\\
\left\{ {\sigma\tau \atop \tau} \right\} &= \frac{1}{g_{\tau\tau}}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\tau\tau}}{\partial x_\sigma}\\
\left\{ {\sigma\sigma \atop \tau} \right\} &= \frac{1}{g_{\tau\tau}}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial x_\tau}\right)\\
\left\{ {\sigma\sigma \atop \tau} \right\} &= -\frac{1}{g_{\tau\tau}}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial x_\tau}
\end{aligned}$$

entonces, para $\left\{ {\sigma\sigma \atop \sigma} \right\}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\{ {11 \atop 1} \right\} &= \frac{1}{2}\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\frac{1}{e^\lambda}\frac{\partial e^\lambda}{\partial r} = \frac{1}{2}e^{-\lambda}e^\lambda\lambda' = \frac{1}{2}\lambda'\\
\left\{ {22 \atop 2} \right\} &= \frac{1}{2}\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2}{\partial \theta} = 0\\
\left\{ {33 \atop 3} \right\} &= \frac{1}{2}\frac{1}{g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x_3} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial r^2 \operatorname{sen}^2\theta}{\partial \phi} = 0\\
\left\{ {44 \atop 4} \right\} &= \frac{1}{2}\frac{1}{g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_4} = \frac{1}{2}\frac{1}{e^\nu}\frac{\partial e^\nu}{\partial (ct)} = 0
\end{aligned}$$

para $\left\{ {\sigma\tau \atop \tau} \right\}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\{ {12 \atop 2} \right\} &= \frac{1}{2}\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\frac{1}{-r^2}\frac{\partial(-r^2)}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}2r = \frac{1}{r}\\
\left\{ {13 \atop 3} \right\} &= \frac{1}{2}\frac{1}{g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial(r^2 \operatorname{sen}^2\theta)}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\operatorname{sen}^2\theta 2r = \frac{1}{r}\\
\left\{ {14 \atop 4} \right\} &= \frac{1}{2}\frac{1}{g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\frac{1}{e^\nu}\frac{\partial e^\nu}{\partial r} = \frac{1}{2}e^{-\nu}e^\nu\nu' = \frac{1}{2}\nu'\\
\left\{ {32 \atop 2} \right\} &= \frac{1}{2}\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_3} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2}{\partial \phi} = 0\\
\left\{ {42 \atop 2} \right\} &= \frac{1}{2}\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_4} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2}{\partial (ct)} = 0\\
\left\{ {23 \atop 3} \right\} &= \frac{1}{2}\frac{1}{g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial(r^2 \operatorname{sen}^2\theta)}{\partial x_\theta} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}r^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta\\
\left\{ {24 \atop 4} \right\} &= \frac{1}{2}\frac{1}{g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\frac{1}{e^\nu}\frac{\partial e^\nu}{\partial x_\theta} = 0\\
\left\{ {31 \atop 1} \right\} &= \frac{1}{2}\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_3} = \frac{1}{2}\frac{1}{e^\lambda}\frac{\partial e^\lambda}{\partial x_\phi} = 0\\
\left\{ {34 \atop 4} \right\} &= \frac{1}{2}\frac{1}{g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_3} = \frac{1}{2}\frac{1}{e^\nu}\frac{\partial e^\nu}{\partial (ct)} = 0\\
\left\{ {41 \atop 1} \right\} &= \frac{1}{2}\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_4} = \frac{1}{2}\frac{1}{e^\lambda}\frac{\partial e^\lambda}{\partial (ct)} = 0
\end{aligned}$$

$$\left\{ {21 \atop 1} \right\} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\frac{1}{e^{\lambda}}\frac{\partial e^{\lambda}}{\partial x_{\theta}} = 0$$

para $\left\{ {\sigma\sigma \atop \tau} \right\}$, tenemos

$$\left\{ {11 \atop 2} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{-r^2}\frac{\partial(-e^{\lambda})}{\partial x_{\theta}} = 0$$

$$\left\{ {11 \atop 3} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{33}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{-r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial(-e^{\lambda})}{\partial x_{\phi}} = 0$$

$$\left\{ {11 \atop 4} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{44}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_4} = -\frac{1}{2}\frac{1}{e^{\nu}}\frac{\partial(-e^{\lambda})}{\partial(ct)} = 0$$

$$\left\{ {22 \atop 1} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{-e^{\lambda}}\frac{\partial(-r^2)}{\partial r} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}2r = -re^{-\lambda}$$

$$\left\{ {33 \atop 1} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{-e^{\lambda}}\frac{\partial(-r^2 \operatorname{sen}^2\theta)}{\partial r} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}(2r\operatorname{sen}^2\theta) = -r\operatorname{sen}^2\theta e^{-\lambda}$$

$$\left\{ {44 \atop 1} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{-e^{\lambda}}\frac{\partial e^{\nu}}{\partial r} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}e^{\nu}\nu' = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'$$

$$\left\{ {33 \atop 2} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{-r^2}\frac{\partial(-r^2 \operatorname{sen}^2\theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}r^{-2}(2r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) - \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\left\{ {44 \atop 2} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{-r^2}\frac{\partial e^{\nu}}{\partial \theta} = 0$$

$$\left\{ {22 \atop 3} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{33}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{-r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial(-r^2)}{\partial \phi} = 0$$

$$\left\{ {22 \atop 4} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{44}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_4} = -\frac{1}{2}\frac{1}{e^{\nu}}\frac{\partial(-r^2)}{\partial(ct)} = 0$$

$$\left\{ {33 \atop 4} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{44}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x_4} = -\frac{1}{2}\frac{1}{e^{\nu}}\frac{\partial(-r^2 \operatorname{sen}^2\theta)}{\partial(ct)} = 0$$

$$\left\{ {44 \atop 3} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{33}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{-r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial e^{\nu}}{\partial \phi} = 0$$

Encontremos ahora la expresión para cada uno de los componentes del tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\} + \left\{ {\mu\alpha \atop \beta} \right\}\left\{ {\beta\nu \atop \alpha} \right\} + \frac{\partial^2 \log\sqrt{-g}}{\partial x_{\mu}\partial x_{\nu}} - \left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_{\alpha}}$$

cuyas componentes son

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{12} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} & R_{34} \\ R_{14} & R_{24} & R_{34} & R_{44} \end{pmatrix}$$

esto último debido a que $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$, entonces, calculando $R_{11}$

$$\begin{aligned} R_{11} &= -\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left\{ {11 \atop \alpha} \right\} + \left\{ {1\alpha \atop \beta} \right\}\left\{ {\beta 1 \atop \alpha} \right\} + \frac{\partial^2 \log\sqrt{-g}}{\partial x_1^2} - \left\{ {11 \atop \alpha} \right\}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_{\alpha}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{ {11 \atop 1} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{ {11 \atop 2} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_3}\left\{ {11 \atop 3} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_4}\left\{ {11 \atop 4} \right\} \\ &+ \left\{ {11 \atop 1} \right\}\left\{ {11 \atop 1} \right\} + \left\{ {12 \atop 1} \right\}\left\{ {11 \atop 2} \right\} + \left\{ {13 \atop 1} \right\}\left\{ {11 \atop 3} \right\} + \left\{ {14 \atop 1} \right\}\left\{ {11 \atop 4} \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{11}{2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{21}{1} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{12}{2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{21}{2} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{13}{2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{21}{3} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{14}{2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{21}{4}\\
&+ \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{11}{3}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{31}{1} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{12}{3}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{31}{2} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{13}{3}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{31}{3} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{14}{3}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{31}{4}\\
&+ \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{11}{4}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{41}{1} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{12}{4}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{41}{2} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{13}{4}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{41}{3} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{14}{4}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{41}{4}\\
&+ \frac{\partial^2 \log\sqrt{e^{\lambda+\nu} r^4 \operatorname{sen}^2\theta}}{\partial r^2} - \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{11}{1}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_1} - \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{11}{2}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_2} - \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{11}{3}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_3} - \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{11}{4}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_4}
\end{aligned}
$$

substituyendo pues los valores de los símbolos de Christoffel encontrados anteriormente para $R_{11}$:

$$R_{11} = -\frac{\partial}{\partial r}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{11}{1} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{11}{1}^2 + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{12}{2}^2 + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{13}{3}^2 + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{14}{4}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log(e^{\lambda+\nu} r^4 \operatorname{sen}^2\theta)}{\partial r^2} - \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{11}{1}\frac{1}{2}\frac{\partial \log(e^{\lambda+\nu} r^4 \operatorname{sen}^2\theta)}{\partial r} = 0$$

$$R_{11} = -\frac{\partial \frac{1}{2}\lambda'}{\partial r} + \frac{1}{4}\lambda'^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{2}{r^2} + \frac{1}{2}\lambda'' + \frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{2}\lambda'\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{2}\lambda' + \frac{1}{2}\nu'\right) = 0$$

$$R_{11} = \frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\lambda'}{r} = 0$$

calculando ahora $R_{22}$

$$
\begin{aligned}
R_{22} &= -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{\alpha} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{2\alpha}{\beta}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{\beta 2}{\alpha} + \frac{\partial^2 \log\sqrt{-g}}{\partial x_2^2} - \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{\alpha}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}\\
&= -\frac{\partial}{\partial x_1}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{2} - \frac{\partial}{\partial x_3}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{3} - \frac{\partial}{\partial x_4}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{4}\\
&+ \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{21}{1}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{12}{1} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{1}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{21}{2} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{23}{1}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{12}{3} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{24}{1}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{12}{4}\\
&+ \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{21}{2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{1} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{2} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{23}{2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{3} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{24}{2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{4}\\
&+ \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{21}{3}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{32}{1} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{3}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{32}{2} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{23}{3}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{32}{3} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{24}{3}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{32}{4}\\
&+ \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{21}{4}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{42}{1} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{4}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{42}{2} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{23}{4}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{42}{3} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{24}{4}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{42}{4}\\
&+ \frac{\partial^2 \log\sqrt{e^{\lambda+\nu} r^4 \operatorname{sen}^2\theta}}{\partial \theta^2} - \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{1}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_1} - \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{2}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_2} - \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{3}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_3} - \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{4}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_4}
\end{aligned}
$$

substituyendo pues los valores de los símbolos de Christoffel encontrados anteriormente:

$$R_{22} = -\frac{\partial}{\partial r}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{1} + 2\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{1}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{12}{2} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{23}{3}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log(e^{\lambda+\nu} r^4 \operatorname{sen}^2\theta)}{\partial \theta^2} - \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{22}{1}\frac{1}{2}\frac{\partial \log(e^{\lambda+\nu} r^4 \operatorname{sen}^2\theta)}{\partial r} = 0$$

$$R_{22} = -\frac{\partial(-re^{-\lambda})}{\partial r} + 2(-re^{-\lambda})(\frac{1}{r}) + \cot^2\theta - \csc^2\theta + \frac{1}{2}re^{-\lambda}\left(\frac{4}{r} + \lambda' + \nu'\right) = 0$$

$$R_{22} = e^{-\lambda}(1 - r\lambda') - 2e^{-\lambda} + \cot^2\theta - \csc^2\theta + re^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\lambda' + \frac{1}{2}\nu' + \frac{2}{r}\right) = 0$$

$$R_{22} = e^{-\lambda}\left[1 - r\lambda' + \frac{1}{2}r\lambda' + \frac{1}{2}r\nu'\right] - 1 = 0$$

$$R_{22} = e^{-\lambda}\left[1 + \frac{1}{2}r(\nu' - \lambda')\right] - 1 = 0$$

calculando $R_{33}$

$$
\begin{aligned}
R_{33} &= -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{33}{\alpha} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{3\alpha}{\beta}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{\beta 3}{\alpha} + \frac{\partial^2 \log\sqrt{-g}}{\partial x_3^2} - \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{33}{\alpha}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}\\
&= -\frac{\partial}{\partial x_1}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{33}{1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{33}{2} - \frac{\partial}{\partial x_3}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{33}{3} - \frac{\partial}{\partial x_4}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{33}{4}\\
&+ \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{31}{1}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{13}{1} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{32}{1}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{13}{2} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{33}{1}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{13}{3} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{34}{1}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{13}{4}\\
&+ \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{31}{2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{23}{1} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{32}{2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{23}{2} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{33}{2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{23}{3} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{34}{2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{23}{4}\\
&+ \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{31}{3}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{33}{1} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{32}{3}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{33}{2} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{33}{3}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{33}{3} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{34}{3}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{33}{4}
\end{aligned}
$$

$$+\left\{{31 \atop 4}\right\}\left\{{43 \atop 1}\right\}+\left\{{32 \atop 4}\right\}\left\{{43 \atop 2}\right\}+\left\{{33 \atop 4}\right\}\left\{{43 \atop 3}\right\}+\left\{{34 \atop 4}\right\}\left\{{43 \atop 4}\right\}$$
$$+\frac{\partial^2 \log\sqrt{e^{\lambda+\nu}r^4\operatorname{sen}^2\theta}}{\partial\phi^2}-\left\{{33 \atop 1}\right\}\frac{\partial\log\sqrt{-g}}{\partial x_1}-\left\{{33 \atop 2}\right\}\frac{\partial\log\sqrt{-g}}{\partial x_2}-\left\{{33 \atop 3}\right\}\frac{\partial\log\sqrt{-g}}{\partial x_3}-\left\{{33 \atop 4}\right\}\frac{\partial\log\sqrt{-g}}{\partial x_4}$$

substituyendo pues los valores de los símbolos de Christoffel encontrados anteriormente:

$$R_{33}=-\frac{\partial}{\partial r}\left\{{33 \atop 1}\right\}-\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{{33 \atop 2}\right\}+2\left\{{33 \atop 1}\right\}\left\{{13 \atop 3}\right\}+2\left\{{33 \atop 2}\right\}\left\{{23 \atop 3}\right\}-\left\{{33 \atop 1}\right\}\frac{1}{2}\frac{\partial\log(e^{\lambda+\nu}r^4\operatorname{sen}^2\theta)}{\partial r}-\left\{{33 \atop 2}\right\}\frac{1}{2}\frac{\partial\log(e^{\lambda+\nu}r^4\operatorname{sen}^2\theta)}{\partial\theta}$$
$$R_{33}=\frac{\partial(r^2\operatorname{sen}^2\theta e^{-\lambda})}{\partial r}+\frac{\partial(\operatorname{sen}\theta\cos\theta)}{\partial\theta}-2(r\operatorname{sen}^2\theta e^{-\lambda})(\frac{1}{r})-2(\operatorname{sen}\theta\cos\theta)(\cot\theta)$$
$$+r\operatorname{sen}^2\theta e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\lambda'+\frac{1}{2}\nu'+\frac{2}{r}\right)+\cos^2\theta=0$$
$$R_{33}=e^{-\lambda}\operatorname{sen}^2\theta(1-r\lambda')+(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)-2\operatorname{sen}^2\theta e^{-\lambda}-2\cos^2\theta+r\operatorname{sen}^2\theta e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\lambda'+\frac{1}{2}\nu'+\frac{2}{r}\right)+\cos^2\theta=0$$
$$R_{33}=e^{-\lambda}\operatorname{sen}^2\theta(1-r\lambda')-\operatorname{sen}^2\theta(2e^{-\lambda}+1)+\operatorname{sen}^2\theta re^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\lambda'+\frac{1}{2}\nu'+\frac{2}{r}\right)=0$$
$$R_{33}=\operatorname{sen}^2\theta\left[e^{-\lambda}\left(1-r\lambda'-2+\frac{1}{2}r\lambda'+\frac{1}{2}r\nu'+2\right)-1\right]=0$$
$$R_{33}=\operatorname{sen}^2\theta\left[e^{-\lambda}\left(1-\frac{1}{2}r(\lambda'+\nu')\right)-1\right]=0$$

calculando $R_{44}$

$$R_{44}=-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{{44 \atop \alpha}\right\}+\left\{{4\alpha \atop \beta}\right\}\left\{{\beta 4 \atop \alpha}\right\}+\frac{\partial^2\log\sqrt{-g}}{\partial x_4^2}-\left\{{44 \atop \alpha}\right\}\frac{\partial\log\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}$$
$$=-\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{{44 \atop 1}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{{44 \atop 2}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_3}\left\{{44 \atop 3}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_4}\left\{{44 \atop 4}\right\}$$
$$+\left\{{41 \atop 1}\right\}\left\{{14 \atop 1}\right\}+\left\{{42 \atop 1}\right\}\left\{{14 \atop 2}\right\}+\left\{{43 \atop 1}\right\}\left\{{14 \atop 3}\right\}+\left\{{44 \atop 1}\right\}\left\{{14 \atop 4}\right\}$$
$$+\left\{{41 \atop 2}\right\}\left\{{24 \atop 1}\right\}+\left\{{42 \atop 2}\right\}\left\{{24 \atop 2}\right\}+\left\{{43 \atop 2}\right\}\left\{{24 \atop 3}\right\}+\left\{{44 \atop 2}\right\}\left\{{24 \atop 4}\right\}$$
$$+\left\{{41 \atop 3}\right\}\left\{{34 \atop 1}\right\}+\left\{{42 \atop 3}\right\}\left\{{34 \atop 2}\right\}+\left\{{43 \atop 3}\right\}\left\{{34 \atop 3}\right\}+\left\{{44 \atop 3}\right\}\left\{{34 \atop 4}\right\}$$
$$+\left\{{41 \atop 4}\right\}\left\{{44 \atop 1}\right\}+\left\{{42 \atop 4}\right\}\left\{{44 \atop 2}\right\}+\left\{{43 \atop 4}\right\}\left\{{44 \atop 3}\right\}+\left\{{44 \atop 4}\right\}\left\{{44 \atop 4}\right\}$$
$$+\frac{\partial^2\log\sqrt{e^{\lambda+\nu}r^4\operatorname{sen}^2\theta}}{\partial(ct)^2}-\left\{{44 \atop 1}\right\}\frac{\partial\log\sqrt{-g}}{\partial x_1}-\left\{{44 \atop 2}\right\}\frac{\partial\log\sqrt{-g}}{\partial x_2}-\left\{{44 \atop 3}\right\}\frac{\partial\log\sqrt{-g}}{\partial x_3}-\left\{{44 \atop 4}\right\}\frac{\partial\log\sqrt{-g}}{\partial x_4}$$

substituyendo pues los valores de los símbolos de Christoffel encontrados anteriormente:

$$R_{44}=-\frac{\partial}{\partial r}\left\{{44 \atop 1}\right\}+2\left\{{44 \atop 1}\right\}\left\{{14 \atop 4}\right\}-\left\{{44 \atop 1}\right\}\frac{1}{2}\frac{\partial\log(e^{\lambda+\nu}r^4\operatorname{sen}^2\theta)}{\partial r}=0$$
$$R_{44}=-\frac{\partial(\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu')}{\partial r}+2\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'(\frac{1}{2}\nu')-\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'\frac{1}{2}\left(\frac{4}{r}+\lambda'+\nu'\right)=0$$
$$R_{44}=-\frac{1}{2}\left(e^{\nu-\lambda}\nu''+e^{\nu-\lambda}(\nu'-\lambda')\nu'\right)+\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'^2-\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{2}\lambda'+\frac{1}{2}\nu'\right)=0$$
$$R_{44}=e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{1}{2}\nu''-\frac{1}{2}\nu'^2+\frac{1}{2}\nu'\lambda'+\frac{1}{2}\nu'^2-\frac{\nu'}{r}-\frac{1}{4}\nu'\lambda'-\frac{1}{4}\nu'^2\right)=0$$
$$R_{44}=e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{1}{2}\nu''+\frac{1}{4}\nu'\lambda'-\frac{1}{4}\nu'^2-\frac{\nu'}{r}\right)=0$$

Todos los demás componentes son cero, como es posible ver y que por razones de espacio omitimos el cálculo. Quedan entonces

$$\begin{cases} R_{11} &= \frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\lambda'}{r} = 0 \\ \\ R_{22} &= e^{-\lambda}\Bigg[1 + \frac{1}{2}r(\nu' - \lambda')\Bigg] - 1 = 0 \\ \\ R_{33} &= \operatorname{sen}^2\theta\Bigg[e^{-\lambda}\Bigg(1 + \frac{1}{2}r(\nu' - \lambda')\Bigg) - 1\Bigg] = 0 \\ \\ R_{44} &= e^{\nu-\lambda}\Bigg( - \frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\lambda'\nu' - \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\nu'}{r}\Bigg) = 0 \end{cases}$$

De $R_{11}$ se tiene que

$$-\frac{\lambda'}{r} = -\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\lambda'\nu' - \frac{1}{4}\nu'^2$$

substituyendo en $R_{44}$

$$R_{44} = e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\lambda'\nu' - \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\nu'}{r}\right) = e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r}\right) = 0$$

como $e^{\nu-\lambda} \neq 0$, entonces,

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} &= 0 \\ \lambda' + \nu' &= 0 \\ \lambda' &= -\nu' \end{aligned}$$

integrando con respecto a $r$

$$\lambda = -\nu + c$$

Sabemos que $\lim_{r\to\infty} \lambda, \nu = 0$, asi que $c = 0$, entonces $\lambda = -\nu$, substituyendo en $R_{22}$

$$\begin{aligned} R_{22} = e^{\nu}\left(1 + \frac{1}{2}r(\nu' + \nu')\right) - 1 = e^{\nu}(1 + r\nu') - 1 = 0 \\ e^{\nu} + re^{\nu}\nu' = 1 \end{aligned}$$

haciendo $\gamma = e^{\nu}$, entonces $\gamma' = e^{\nu}\nu'$, substituyendo en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \gamma + r\gamma' &= 1 \\ \gamma + r\frac{d\gamma}{dr} &= 1 \\ \gamma\, dr + r\, d\gamma &= dr \\ d(\gamma r) &= dr \\ \gamma r &= r + c \end{aligned}$$

haga $c = -2m$, entonces,

$$\begin{aligned} \gamma r &= r - 2m \\ \gamma &= 1 - \frac{2m}{r}, \end{aligned}$$

entonces,

$$e^{\nu} = 1 - \frac{2m}{r},$$

de $\lambda = -\nu$, tenemos que

$$\begin{aligned} e^{\lambda} &= e^{-\nu}, \quad \text{entonces,} \\ e^{\lambda} &= \frac{1}{1 - \dfrac{2m}{r}} \end{aligned}$$

Asi que la métrica de Schwarzschild queda finalmente expresada como

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\gamma^{-1}\, dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta\, d\phi^2 + \gamma c^2\, dt^2 \\ ds^2 &= -\frac{dr^2}{1 - \dfrac{2m}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2) + (1 - \frac{2m}{r}) c^2 dt^2 \end{aligned}$$

haciendo $d\Omega = -r^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2)$ y como vimos en la sección anterior $2m = \dfrac{2GM}{c^2}$, asi que

$$\boxed{ds^2 = \frac{-dr^2}{1 - \dfrac{2GM}{c^2 r}} + d\Omega^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2}$$

14.5. **Interpretación de la forma** $ds$**:** Para puntos indefinidamente alejados $r \to \infty$ estas coordenadas coinciden con las tres coordenadas esféricas y la coordenada tiempo del espacio euclídeo. Para puntos próximos al centro gravitatorio, las tres primeras continúan siendo las coordenadas del espacio; para un punto fijo respecto al centro tenemos $dr = 0$, $d\phi = 0$ y $d\theta = 0$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 \gamma\, dt^2 \\ ds &= c\sqrt{\gamma}\, dt^2 \\ \frac{ds}{c} &= \sqrt{\gamma}\, dt \\ d\tau &= \frac{ds}{c} = \sqrt{\gamma}\, dt \\ d\tau &= \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}\, dt \quad \text{o sea} \\ dt &= \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \dfrac{2GM}{rc^2}}} \quad \text{Cf. (10.14)} \end{aligned}$$

donde $2GM/c^2 < r < \infty$ y $\tau$ el tiempo propio, es decir, el tiempo medido por un observador en el punto fijo y $dt$ el tiempo de la coordenada (en este caso, el tiempo medido por un observador exterior, es decir, en el espacio euclídeano). A medida que nos acercamos al centro gravitatorio, es decir a medida que $r \to 0$, de hecho $r > 2GM/c^2$, tenemos que $\gamma = 1 - 2GM/rc^2$ disminuye, entonces,

$$dt > d\tau$$

Por lo que el tiempo medido por el observador cerca del centro gravitatorio se dilata con respecto al observador exterior al campo, es decir, cuando el campo gravitatorio aumenta, el tiempo transcurre más lentamente.
La distancia en el espacio entre dos puntos indefinidamente próximos $(r_0, \theta_0, \phi_0, t_0)$ a $(r_1, \theta_1, \phi_1, t_0)$ (recuerde que como la unidad lineal no se mueve durante el transcurso del tiempo $dt = 0$ o lo que es lo mismo, la coordenada inicial y final son obtenidas en un intervalo $dt = 0$) vendrá dada por

$$dl^2 = ds^2 = \gamma^{-1}\, dr^2 + r^2\, d\theta^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta^2$$

y como $\gamma$ difiere poco de la unidad, resulta que el espacio es casi euclídeo. Si colocamos nuestra unidad lineal $dl$ perpendicularmente al radio, tenemos que $dr = 0$ y

$$dl^2 = ds^2 = r^2\, d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta\, d\phi^2$$

resulta, pues, que nuestras medidas corresponderan en este caso con las del espacio euclídeo. Ahora si colocamos nuestra unidad lineal $dl$ radialmente, es decir, sobre $dr$ obtendremos, $d\theta = d\phi = 0$ y

$$\begin{aligned} ds^2 &= dl^2 = \gamma^{-1} dr^2 \\ dl^2 &= \gamma^{-1} dr^2 \\ dr^2 &= \gamma dl^2 \\ dr &= \sqrt{\gamma} dl \\ dr &= \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dl \quad \text{Cf. (10.13)} \end{aligned}$$

donde $2GM/c^2 < r < \infty$ y $dl$ la longitud propia, es decir, la longitud medida por el observador en el punto fijo y $dr$ la longitud de la coordenada (en este caso, el tiempo medido por un observador exterior, es decir, en el espacio euclídeano). A medida que nos acercamos al centro gravitatorio, es decir a medida que $r \to 0$, de hecho $r > 2GM/c^2$, tenemos que $\gamma = 1 - 2GM/rc^2$ disminuye y por lo tanto

$$dr < dl$$

Por lo que la longitud puesta cerca del centro gravitatorio se contrae con respecto al observador exterior al campo, es decir, cuando el campo gravitatorio aumenta, las longitudes se contraen, el espacio aquí pues, no es euclídeo. También, si nuestra unidad sigue colocada radialmente ahora desde el punto digamos $(0, \theta_0, \phi_0, t_0)$ al $(R, \theta_0, \phi_0, t_0)$, entonces,

$$\begin{aligned} dl^2 &= \gamma^{-1} dr^2 \\ dl &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} dr \\ dl &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}} dr \end{aligned}$$

$$l = \int_0^R \frac{dr}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{1/2}} \neq R$$

Consecuentemente el cociente de la circunferencia del círculo que pasa por el punto $(R, \theta_0, \phi_0, t_0)$ a su radio será

$$\frac{2\pi R}{l} \neq 2\pi \quad \text{ver ecuación (14.2).}$$

Cabe mencionar aquí que cuando $r = 2GM/c^2$ se tiene un comportamiento especial (Hoyo negro), para este caso, $dt = \infty$ y $dr = 0$, el tiempo se detiene y las longitudes se reducen a cero. Al perímetro formado por $r = 2GM/c^2$ se le llama horizonte de eventos. Para que nuestro sol se convierta en un hoyo negro es necesario que su radio disminuya en $r = 2GM/c^2$, es decir en aproximadamente 3 Km. La misma situación es aplicable como por ejemplo para un protón, para que éste se convierta en un mini-agujero negro, es necesario que el radio del protón disminuya a $2GM/c^2$, siendo $M$ en este caso la masa de la partícula. Estas situaciones se suponen que pudieron haber pasado (según Stephen Hawking) pocos momentos despues de la explosión del Big-Bang, las enormes fuerzas producidas en los choques de las partículas en aquel momento, pudieron ser lo suficientemente poderosas como para que los protones colisionaran comprimiendo su volumen a un radio igual a $2GM/c^2$ y de esta manera convertirse en mini-agujeros negros. Le recomiendo al lector ver la figura relativa a este tema al final de la presente sección.

14.6. **Movimiento planetario según Einstein.** Determinemos ahora el movimiento de una masa $m'$ en un campo gravitatorio bajo la nueva mecánica de Einstein. Según la teoría de la relatividad, la trayectoria de una masa libre en la variedad de cuatro dimensiones será la geodésica dada por las ecuaciones

$$\frac{d^2x_\sigma}{ds^2} + \left\{ {\alpha\beta \atop \sigma} \right\} \frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0$$

equivalentes a $\int ds = minimo$. En estas ecuaciones se deben substituir los valores particulares encontrados para las $g_{\mu\nu}$ del campo. Empleando las coordenadas que ya se han utilizadas $r$, $\theta$, $\phi$, y $ct$ y los valores encontrados para los símbolos de Christoffel en estas ecuaciones, tenemos,
Desarrollando para $\sigma = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2r}{ds^2} &+ \left\{ {11 \atop 1} \right\} \frac{dx_1}{ds}\frac{dx_1}{ds} + \left\{ {12 \atop 1} \right\} \frac{dx_1}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \left\{ {13 \atop 1} \right\} \frac{dx_1}{ds}\frac{dx_3}{ds} + \left\{ {14 \atop 1} \right\} \frac{dx_1}{ds}\frac{dx_4}{ds} \\
&+ \left\{ {21 \atop 1} \right\} \frac{dx_2}{ds}\frac{dx_1}{ds} + \left\{ {22 \atop 1} \right\} \frac{dx_2}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \left\{ {23 \atop 1} \right\} \frac{dx_2}{ds}\frac{dx_3}{ds} + \left\{ {24 \atop 1} \right\} \frac{dx_2}{ds}\frac{dx_4}{ds} \\
&+ \left\{ {31 \atop 1} \right\} \frac{dx_3}{ds}\frac{dx_1}{ds} + \left\{ {32 \atop 1} \right\} \frac{dx_3}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \left\{ {33 \atop 1} \right\} \frac{dx_3}{ds}\frac{dx_3}{ds} + \left\{ {34 \atop 1} \right\} \frac{dx_3}{ds}\frac{dx_4}{ds} \\
&+ \left\{ {41 \atop 1} \right\} \frac{dx_4}{ds}\frac{dx_1}{ds} + \left\{ {42 \atop 1} \right\} \frac{dx_4}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \left\{ {43 \atop 1} \right\} \frac{dx_4}{ds}\frac{dx_3}{ds} + \left\{ {44 \atop 1} \right\} \frac{dx_4}{ds}\frac{dx_4}{ds} = 0
\end{aligned}$$

substituyendo pues los valores encontrados en la secciones anteriores,

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2r}{ds^2} + \left\{ {11 \atop 1} \right\} \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds} + \left\{ {22 \atop 1} \right\} \frac{d\theta}{ds}\frac{d\theta}{ds} + \left\{ {44 \atop 1} \right\} \frac{d(ct)}{ds}\frac{d(ct)}{ds} = 0 \\
&\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{1}{2}\lambda'(\frac{dr}{ds})^2 - re^{-\lambda}(\frac{d\theta}{ds})^2 + \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'(\frac{d(ct)}{ds})^2 = 0 \\
&\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{1}{2}\lambda'(\frac{dr}{ds})^2 - re^{-\lambda}(\frac{d\theta}{ds})^2 + \frac{c^2}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'(\frac{dt}{ds})^2 = 0
\end{aligned}$$

Desarrollando para $\sigma = 2$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\theta}{ds^2} &+ \left\{ {11 \atop 2} \right\} \frac{dx_1}{ds}\frac{dx_1}{ds} + \left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{dx_1}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \left\{ {13 \atop 2} \right\} \frac{dx_1}{ds}\frac{dx_3}{ds} + \left\{ {14 \atop 2} \right\} \frac{dx_1}{ds}\frac{dx_4}{ds} \\
&+ \left\{ {21 \atop 2} \right\} \frac{dx_2}{ds}\frac{dx_1}{ds} + \left\{ {22 \atop 2} \right\} \frac{dx_2}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \left\{ {23 \atop 2} \right\} \frac{dx_2}{ds}\frac{dx_3}{ds} + \left\{ {24 \atop 2} \right\} \frac{dx_2}{ds}\frac{dx_4}{ds} \\
&+ \left\{ {31 \atop 2} \right\} \frac{dx_3}{ds}\frac{dx_1}{ds} + \left\{ {32 \atop 2} \right\} \frac{dx_3}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \left\{ {33 \atop 2} \right\} \frac{dx_3}{ds}\frac{dx_3}{ds} + \left\{ {34 \atop 2} \right\} \frac{dx_3}{ds}\frac{dx_4}{ds} \\
&+ \left\{ {41 \atop 2} \right\} \frac{dx_4}{ds}\frac{dx_1}{ds} + \left\{ {42 \atop 2} \right\} \frac{dx_4}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \left\{ {43 \atop 2} \right\} \frac{dx_4}{ds}\frac{dx_3}{ds} + \left\{ {44 \atop 2} \right\} \frac{dx_4}{ds}\frac{dx_4}{ds} = 0
\end{aligned}$$

substituyendo pues los valores encontrados en la secciones anteriores,

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\theta}{ds^2} + \left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} + \left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} + \left\{ {33 \atop 2} \right\} \frac{d\phi}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0 \\
&\frac{d^2\theta}{ds^2} + 2\left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} + \left\{ {33 \atop 2} \right\} (\frac{d\phi}{ds})^2 = 0 \\
&\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta(\frac{d\phi}{ds})^2 = 0
\end{aligned}$$

Desarrollando para $\sigma = 3$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\phi}{ds^2} &+ \left\{ {11 \atop 3} \right\} \frac{dx_1}{ds}\frac{dx_1}{ds} + \left\{ {12 \atop 3} \right\} \frac{dx_1}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \left\{ {13 \atop 3} \right\} \frac{dx_1}{ds}\frac{dx_3}{ds} + \left\{ {14 \atop 3} \right\} \frac{dx_1}{ds}\frac{dx_4}{ds} \\
&+ \left\{ {21 \atop 3} \right\} \frac{dx_2}{ds}\frac{dx_1}{ds} + \left\{ {22 \atop 3} \right\} \frac{dx_2}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \left\{ {23 \atop 3} \right\} \frac{dx_2}{ds}\frac{dx_3}{ds} + \left\{ {24 \atop 3} \right\} \frac{dx_2}{ds}\frac{dx_4}{ds} \\
&+ \left\{ {31 \atop 3} \right\} \frac{dx_3}{ds}\frac{dx_1}{ds} + \left\{ {32 \atop 3} \right\} \frac{dx_3}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \left\{ {33 \atop 3} \right\} \frac{dx_3}{ds}\frac{dx_3}{ds} + \left\{ {34 \atop 3} \right\} \frac{dx_3}{ds}\frac{dx_4}{ds}
\end{aligned}$$

$$+\left\{{41 \atop 3}\right\}\frac{dx_4}{ds}\frac{dx_1}{ds}+\left\{{42 \atop 3}\right\}\frac{dx_4}{ds}\frac{dx_2}{ds}+\left\{{43 \atop 3}\right\}\frac{dx_4}{ds}\frac{dx_3}{ds}+\left\{{44 \atop 3}\right\}\frac{dx_4}{ds}\frac{dx_4}{ds}=0$$

substituyendo pues los valores encontrados en la secciones anteriores,

$$\frac{d^2\phi}{ds^2}+2\left\{{13 \atop 3}\right\}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds}+2\left\{{23 \atop 3}\right\}\frac{d\theta}{ds}\frac{d\phi}{ds}=0$$
$$\frac{d^2\phi}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds}+2\cot\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\phi}{ds}=0$$

Desarrollando para $\sigma=4$

$$\begin{aligned}\frac{d^2(ct)}{ds^2}&+\left\{{11 \atop 4}\right\}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_1}{ds}+\left\{{12 \atop 4}\right\}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_2}{ds}+\left\{{13 \atop 4}\right\}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_3}{ds}+\left\{{14 \atop 4}\right\}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_4}{ds}\\&+\left\{{21 \atop 4}\right\}\frac{dx_2}{ds}\frac{dx_1}{ds}+\left\{{22 \atop 4}\right\}\frac{dx_2}{ds}\frac{dx_2}{ds}+\left\{{23 \atop 4}\right\}\frac{dx_2}{ds}\frac{dx_3}{ds}+\left\{{24 \atop 4}\right\}\frac{dx_2}{ds}\frac{dx_4}{ds}\\&+\left\{{31 \atop 4}\right\}\frac{dx_3}{ds}\frac{dx_1}{ds}+\left\{{32 \atop 4}\right\}\frac{dx_3}{ds}\frac{dx_2}{ds}+\left\{{33 \atop 4}\right\}\frac{dx_3}{ds}\frac{dx_3}{ds}+\left\{{34 \atop 4}\right\}\frac{dx_3}{ds}\frac{dx_4}{ds}\\&+\left\{{41 \atop 4}\right\}\frac{dx_4}{ds}\frac{dx_1}{ds}+\left\{{42 \atop 4}\right\}\frac{dx_4}{ds}\frac{dx_2}{ds}+\left\{{43 \atop 4}\right\}\frac{dx_4}{ds}\frac{dx_3}{ds}+\left\{{44 \atop 4}\right\}\frac{dx_4}{ds}\frac{dx_4}{ds}=0\end{aligned}$$

substituyendo pues los valores encontrados en la secciones anteriores,

$$\frac{d^2(ct)}{ds^2}+\left\{{14 \atop 4}\right\}\frac{dr}{ds}\frac{d(ct)}{ds}+\left\{{14 \atop 4}\right\}\frac{dr}{ds}\frac{d(ct)}{ds}=0$$
$$c\frac{d^2t}{ds^2}+2c\left\{{14 \atop 4}\right\}\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds}=0$$
$$\frac{d^2t}{ds^2}+2\left\{{14 \atop 4}\right\}(\frac{dr}{ds})^2=0$$
$$\frac{d^2t}{ds^2}+\nu'(\frac{dr}{ds})^2=0$$

Tenemos entonces

$$\text{(14.9)}\qquad\begin{cases}\dfrac{d^2r}{ds^2} & +\dfrac{1}{2}\lambda'(\dfrac{dr}{ds})^2-re^{-\lambda}(\dfrac{d\theta}{ds})^2+\dfrac{c^2}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'(\dfrac{dt}{ds})^2=0\\[2ex]\dfrac{d^2\theta}{ds^2} & +\dfrac{2}{r}\dfrac{dr}{ds}\dfrac{d\theta}{ds}-\operatorname{sen}\theta\cos\theta(\dfrac{d\phi}{ds})^2=0\\[2ex]\dfrac{d^2\phi}{ds^2} & +\dfrac{2}{r}\dfrac{dr}{ds}\dfrac{d\phi}{ds}+2\cot\theta\dfrac{d\theta}{ds}\dfrac{d\phi}{ds}=0\\[2ex]\dfrac{d^2t}{ds^2} & +\nu'\dfrac{dr}{ds}\dfrac{dt}{ds}=0\end{cases}$$

De la segunda ecuación diferencial de (14.9) obtenemos las siguientes conclusiones:
Si el punto móvil (planeta) en un momento cualquiera que podemos considerar como inicial, se mueve en el plano determinado por $\theta=\frac{\pi}{2}$, tendremos que en ese instánte

$$\frac{d\theta}{ds}=0$$

también,

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}(0)-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}(\frac{d\phi}{ds})^2=0$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + 0 - 0 = 0$$
$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0$$

Por ser nula la segunda derivada, la primera no variara ($\frac{d\theta}{ds} = constante$) y continuará siendo nula y por consiguiente, el valor de $\theta$ será constantemente igual a $\frac{\pi}{2}$. El movimiento continuará, pues, en el plano $\frac{\pi}{2}$. Ahora, integrando la tercer ecuación diferencial de (14.9)

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0$$
$$\frac{d(\frac{d\phi}{ds})}{ds} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0$$
$$d(\frac{d\phi}{ds}) + 2\frac{dr}{r}\frac{d\phi}{ds} = 0$$
$$\frac{d(\frac{d\phi}{ds})}{\frac{d\phi}{ds}} + 2\frac{dr}{r} = 0$$
$$\int \frac{d(\frac{d\phi}{ds})}{\frac{d\phi}{ds}} + 2\int \frac{dr}{r} = \log h$$
$$\log(\frac{d\phi}{ds}) + 2\log r = \log h$$
$$\log(\frac{d\phi}{ds}) + \log r^2 = \log h$$
$$\log(\frac{d\phi}{ds} \cdot r^2) = \log h$$
$$r^2\frac{d\phi}{ds} = h$$

donde $h$ es una constante de integración. Ahora, integrando la última ecuación diferencial de (14.9)

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \nu'\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds} = 0$$
$$\frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{ds} + \nu'\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds} = 0$$
$$\frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{\frac{dt}{ds}} + \nu'\,dr = 0$$
$$\int \frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{\frac{dt}{ds}} + \int \nu'\,dr = \log k$$
$$\log\frac{dt}{ds} + \nu = \log k$$
$$\log\frac{dt}{ds} - \log k = -\nu$$

$$\log \frac{dt}{ds}/k = -\nu$$
$$\frac{1}{k}\frac{dt}{ds} = e^{-\nu}$$
$$\frac{dt}{ds} = ke^{-\nu}$$

recordando que $\gamma = e^{\nu}$,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{k}{\gamma}$$

Podemos añadir al grupo de ecuaciones diferenciales (14.9), de hecho podemos substituir la primera de (14.9) por $ds^2 = -\gamma^{-1}\,dr^2 - r^2\,d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta\,d\phi^2 + \gamma c^2\,dt^2$, entonces, dividiendo por $-ds^2$, obtendremos

$$-1 = \gamma^{-1}(\frac{dr}{ds})^2 + r^2(\frac{d\theta}{ds})^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta(\frac{d\phi}{ds})^2 - \gamma c^2(\frac{dt}{ds})^2$$

recordando que $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$-1 = \gamma^{-1}(\frac{dr}{ds})^2 + 0 + r^2(\frac{d\phi}{ds})^2 - \gamma c^2(\frac{dt}{ds})^2$$
$$\gamma^{-1}(\frac{dr}{ds})^2 + r^2(\frac{d\phi}{ds})^2 - \gamma c^2(\frac{dt}{ds})^2 = -1$$

multiplicando por $\gamma$

$$(\frac{dr}{ds})^2 + \gamma r^2(\frac{d\phi}{ds})^2 - \gamma^2 c^2(\frac{dt}{ds})^2 = -\gamma$$
$$(\frac{dr}{ds})^2 + \gamma r^2(\frac{d\phi}{ds})^2 + r^2(\frac{d\phi}{ds})^2 - r^2(\frac{d\phi}{ds})^2 - \gamma^2 c^2(\frac{dt}{ds})^2 = -\gamma$$
$$(\frac{dr}{ds})^2 + r^2(\frac{d\phi}{ds})^2 + \gamma r^2(\frac{d\phi}{ds})^2 - r^2(\frac{d\phi}{ds})^2 - \gamma^2 c^2(\frac{dt}{ds})^2 = -\gamma$$

recuerde que $r^2\frac{d\phi}{ds} = h$, entonces, $r^4(\frac{d\phi}{ds})^2 = h^2$ y $r^2(\frac{d\phi}{ds})^2 = \frac{h^2}{r^2}$, entonces,

$$(\frac{dr}{ds})^2 + r^2(\frac{d\phi}{ds})^2 + \gamma\frac{h^2}{r^2} - \frac{h^2}{r^2} - \gamma^2 c^2(\frac{dt}{ds})^2 = -\gamma$$

recuerde que $\frac{dt}{ds} = \frac{k}{\gamma}$, entonces, $(\frac{dt}{ds})^2 = \frac{k^2}{\gamma^2}$, por lo tanto

$$(\frac{dr}{ds})^2 + r^2(\frac{d\phi}{ds})^2 + (\gamma - 1)\frac{h^2}{r^2} - \gamma^2 c^2\frac{k^2}{\gamma^2} = -\gamma$$
$$(\frac{dr}{ds})^2 + r^2(\frac{d\phi}{ds})^2 + (\gamma - 1)\frac{h^2}{r^2} - c^2k^2 = -\gamma$$

substituyendo el valor de $\gamma = 1 - \frac{2m}{r}$, entonces

$$(\frac{dr}{ds})^2 + r^2(\frac{d\phi}{ds})^2 + (1 - \frac{2m}{r} - 1)\frac{h^2}{r^2} - c^2k^2 = -1 + \frac{2m}{r}$$

o bien,

$$(\frac{dr}{ds})^2 + r^2(\frac{d\phi}{ds})^2 = \frac{2m}{r}\frac{h^2}{r^2} + c^2k^2 - 1 + \frac{2m}{r}$$

de esta manera obtenemos el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{cases} (\dfrac{dr}{ds})^2 + r^2(\dfrac{d\phi}{ds})^2 & = c^2k^2 - 1 + \dfrac{2mh^2}{r^3} + \dfrac{2m}{r} \quad \text{y} \\ r^2\dfrac{d\phi}{ds} & = h \end{cases}$$

Despejando $ds$ de la segunda ecuación y luego substituyendo su valor en la primera, resulta

$$ds = \frac{r^2}{h}\, d\phi$$

entonces,

$$\left(\frac{1}{r^2/h}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + r^2\left(\frac{1}{r^2/h}\frac{d\phi}{d\phi}\right)^2 = c^2k^2 - 1 + \frac{2mh^2}{r^3} + \frac{2m}{r}$$

$$\frac{h^2}{r^4}(\frac{dr}{d\phi})^2 + \frac{h^2r^2}{r^4}\frac{d\phi}{d\phi} = c^2k^2 - 1 + \frac{2mh^2}{r^3} + \frac{2m}{r}$$

haciendo $r = \dfrac{1}{u}$, entonces, $dr = -\dfrac{1}{u^2}\, du$, tendremos

$$h^2u^4\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\phi}\right)^2 + h^2u^2 = c^2k^2 - 1 + 2mh^2u^3 + 2mu$$

dividiendo por $h^2$, tendremos

$$(\frac{du}{d\phi})^2 + u^2 = \frac{c^2k^2 - 1}{h^2} + 2mu^3 + \frac{2mu}{h^2}$$

derivando con respecto de $\phi$

$$2\frac{du}{d\phi}\frac{d^2u}{d\phi^2} + 2u\frac{du}{d\phi} = 0 + 6mu^2\frac{du}{d\phi} + \frac{2mu}{h^2}\frac{du}{d\phi}$$

ahora, dividendo por $2\dfrac{du}{d\phi} \neq 0$, tendremos

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3mu^2 + \frac{m}{h^2}$$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2$$

Sabemos que $m = \dfrac{2GM}{c^2}$, entonces

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{c^2h^2} + 3\frac{GM}{c^2}u^2}$$

que es la ecuación diferencial del movimiento de una partícula en un campo gravitatorio bajo la mecánica de Einstein.

Compare esta ecuación diferencial con la obtenida en la sección de movimiento planetario según Newton (haciendo un cambio de variable, ya que en aquella sección se utilizó $\theta$, se hace el cambio por $\phi$):

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2}$$

cuya solución es

$$r = \frac{h^2}{MG[1 + \epsilon \cos(\phi - \tilde{\omega})]}$$

Esta ecuación nos dice que el movimiento es una curva cerrada que puede considerarse como una elipse. La solución de la ecuación diferencial obtenida en la mecánica de Einstein es

$$r = \frac{h^2}{MG[1 + \epsilon \cos(\phi - \tilde{\omega} - \delta\tilde{\omega})]} \tag{14.10}$$

Lo que nos dice ecuación (14.10) que el movimiento es una curva no cerrada que aproximadamente puede considerarse como una elipse cuyo perihelio avanza en cada revolución una fracción de ésta igual a

$$\frac{\delta\tilde{\omega}}{\phi} = \frac{12\pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1 - \epsilon^2)}$$

Para una vuelta completa del planeta $\phi = 2\pi$ y

$$\delta\tilde{\omega} = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1 - \epsilon^2)}$$

siendo $T$ el período y $\epsilon$ la excentricidad.

Como vimos anteriormente, el planeta descibiría (según Newton) una elipse invariante (salvo la perturbación de los demás astros), mientras que según Einstein, la órbita del planeta se moverá sin salirse de su plano, de manera que el eje mayor gire en cada revolución un ángulo $\delta\tilde{\omega}$ dado por la última ecuación. Para Mercurio que es el que tiene el movimiento del perihelio más notorio, la teoría predice un ángulo de 42.9" de arco por siglo, que coincide exactamente con el valor observado.

Otros resultados se obtienen de las ecuaciones de Einstein, como la deflexión de un rayo de luz por su paso cerca de la superficie del Sol, Desviación de las rayas espectrales del Sol, Expansión del Universo, etc.

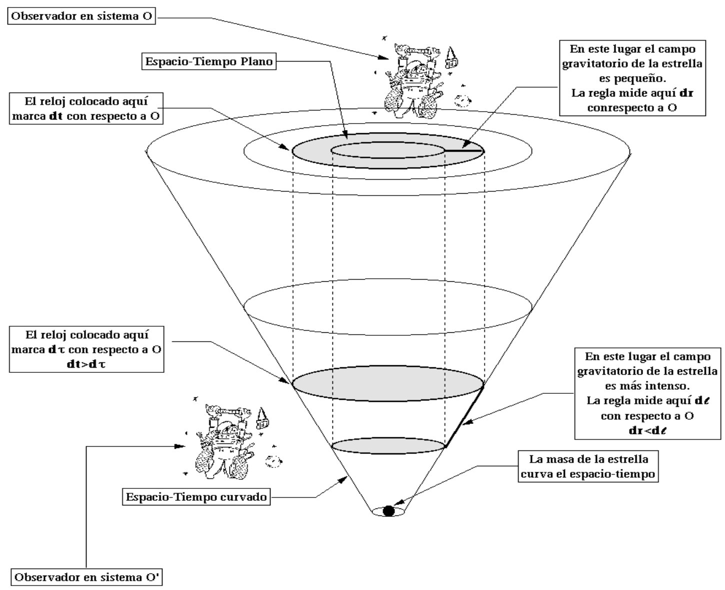
Con respecto al asunto cosmológico, el Universo de Einstein es un Universo esférico de 4 dimensiones curvado en la cuarta diemensión (algo asi como la superficie de una esfera de 3 dimensiones), que está en continua expansión. Si pudieramos lanzar una nave espacial que siguiera alguna trayectoria fija, al cabo de algunos millones de años regresaría al punto de partida. De tal forma que podemos decir que nuestro Universo es finito pero sín límites (Como la superficie de una esfera, es de extensión finita, pero no hay límites en ella).

Como sabemos la materia curva el espacio, considerando una distribución uniforme de la materia en todos lo puntos de Universo, se tendría también una curvatura uniforme en cada punto del Universo con lo cual se obtendría una esfera al considerar el Universo en su aspecto macroscópico. Para entender ésto, daré el siguiento ejemplo:

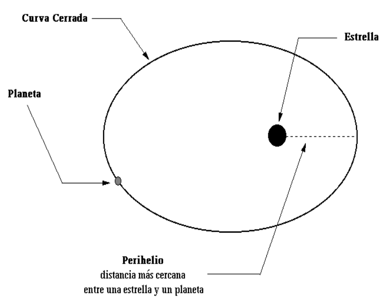
Flatland es un planeta de dos dimensiones que existe en el Universo de Einstein con una dimensión espacial menos. Entonces, este Universo estará constituído por sólo 3 dimensiones, con seres y cosas bidimensionales. Suponga que en Flatland, existen seres llamados humanos que llevan una vida cotidiana sin contratiempos, dichos seres al igual que todo lo que perciben es de dos dimensiones para ellos el Universo es sólo de 2 dimensiones y no más. Sin embargo, la ciencia avanza en dicho planeta y un científico afirma que el Universo es de 3, que se encuentra en expansión y que esta curvado en la tercer dimensión. Obviamente los seres de Flatland no creen el él. Al cabo de varios años de evolución científica, deciden que posiblemente la teoría es verdadera y para tal efecto deciden lanzar una nave espacial con un tripulante en ella (éste ser será uno que no sienta deseos sexuales, ya que viajará muchos años solo). Para sorpresa de los incredulos la nave regresa al mismo punto. Al preguntarle al astronauta sobre que fué lo que vió, él sólo sabe que partió del punto y se movió en línea recta, nunca hizo ningún giro o cambio de rumbo, por lo que infieren que dicha nave tuvo que viajar sobre la superficie de un Universo esférico el cual se curva en la 3er dimensión que no es entendible por el común de la gente sino solamente por los que estudian matemáticas! Por lo que la teoría fué verdadera. Le recomiendo al lector ver la figura relativa a este tema en la siguiente página.

## CONSECUENCIAS DE LA RELATIVIDAD GENERAL

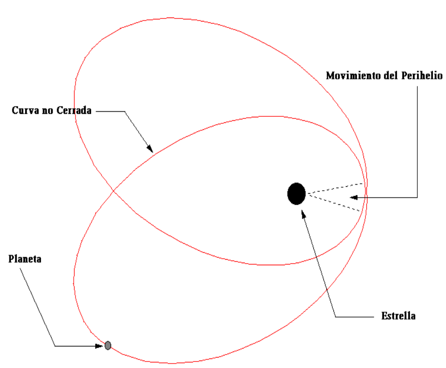
### Curvatura del Espacio




Movimiento planetario según la Física Clásica




Movimiento planetario según la Física Relativista



**Resumiendo:**

- La relatividad restringida hace un análisis de sistemas de referencia que se mueven unos con respecto a otros con velocidad uniforme (constante) llamados sistemas de Galileo.
- Sin embargo, la relatividad restringida excluye el fenómeno gravitatorio.
- El principio de equivalencia nos dice que un sistema de referencia con acelaración uniforme, es equivalente a un sistema de referencia donde existe un campo gravitatorio.
- De esta forma para incorporar el fenómeno gravitatorio a la relatividad, es necesario generalizar el análisis de sistemas con velocidad constante a uno que incluya aquellos sistemas que se mueven con una aceleración uniforme.
- Entonces, estando situados en un sistema de Galileo, será posible (desde el punto de vista teórico) observar la marcha de un fenómeno en un sistema de referencia con aceleración uniforme, después las conclusiones que se obtengan, serán las mismas que se hubieran obtenido si el fenómeno hubiera ocurrido en un sistema de referencia que se encontrara en las inmediaciones de un campo gravitatorio.
- Lo anterior será posible gracias a que nuestras ecuaciones utilizadas (ecuaciones tensoriales) para la representación del fenómeno en algún sistema de referencia son covariantes (conservan la misma forma) al pasar de un sistema de referencia a otro.
- En un sistema de referencia acelarado, el espacio no es Euclideano, sino más bien Remanniano. El análisis de la teoría de las superfices inventado por Gauss se hace necesario para el estudio de este tipo de espacios. Debido a que un campo acelerado es equivalente a un campo gravitatorio, la curvatura del espacio es en escencia la gravedad, o dicho de otra manera, la gravedad es la curvatura del espacio. Asi que el estudio de las superficies será la herramienta para determinar las ecuaciones del campo gravitatorio de acuerdo a los principios de la relatividad general.
- En la descripción de un continuo espacio-tiempo un sistema de coordenadas de Gauss reemplaza perfectamente al sistema de ejes de referencia, de tal manera que en lugar de decir "Las leyes naturales son independientes del sistema de referencia que se utilize para su descripción", decimos: *"Todos los sistemas de coordenadas de Gauss son, en principio equivalentes para la descripción de las leyes de la Naturaleza"*. Estas leyes naturales deben venir expresadas en forma matemática tal que un cambio de coordenadas de Gauss dejen invariables las ecuaciones correspondientes (como dijimos anteriormente: ecuaciones tensoriales) de la propia manera que una transformación de coordenadas por medio de las fórmulas de Lorentz dejan invariables las ecuaciones correspondientes a la teoría de la relatividad restringida.

14.7. **Corrimiento Gravitacional al Rojo.** Primero deduciremos la fórmula para calcular la energía potencial $V$ de una masa $m$ en un campo de fuerza central producido por una masa $M$. La fuerza producida por un campo de fuerza central como el gravitatorio es conservativa. Para este tipo de fuerzas tiene sentido el introducir el concepto de energía de configuración o energía potencial. (Una fuerza es conservativa si el trabajo $W$ realizado por dicha fuerza a traves de una trayectoria cerrada es cero).
Debido a lo anterior:

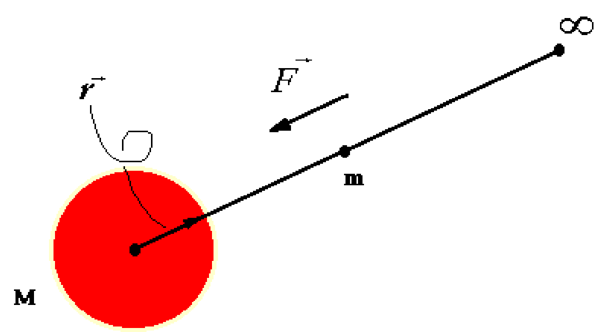
$$\begin{aligned} E_{k_0} + V_0 &= E_{k_f} + V_f \\ E_{k_0} - E_{k_f} &= V_f - V_0 \\ -(E_{k_f} - E_{k_0}) &= \Delta V \\ E_{k_f} - E_{k_0} &= -\Delta V \\ \Delta E_k &= -\Delta V \end{aligned}$$

Donde $E_{k_0}$ y $E_{k_f}$ son las energías cinéticas inicial y final respectivamente.
Recordando el teorema de la variación de la energía:

$$\begin{aligned} E_{k_0} + W &= E_{k_f} \\ W &= E_{k_f} - E_{k_0} \\ W &= \Delta E_k \end{aligned}$$

Utilizando los resultados anteriores, tenemos

$$W = -\Delta V$$




Considere la figura anterior. Es lógico considerar al vector $\vec{r}$ como positivo ya que la dirección de éste es de 0 a $\infty$. Debido a ésto el vector de fuerza $\vec{F}$, será negativo ya que el campo de fuerza central es gravitatorio (un fuerza en este campo tiene un sentido de $\infty$ a 0). Colocando la referencia en el infinito ($\vec{r} = \infty$ con un valor de energía potencial $V = 0$ (ésto también es lógico ya que los efectos de un campo gravitatorio disminuyen con la distancia y se incrementan a medida que nos acerquemos al centro $\vec{r} = 0$). Debido a que las fuerzas en este campo son conservativas, tenemos $\Delta V = -W$. Por definición de trabajo $W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, podemos efectuar una integración desde $\infty$ hasta algún punto $\vec{r} = r$, donde $0 < r < \infty$, entonces:

$$\begin{aligned} V(r) = -W_{\infty - r} &= -\int_{\vec{r}=\infty}^{\vec{r}=r} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r}=\infty}^{\vec{r}=r} \left( -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \right) \cdot d\vec{r} = GMm \int_{\infty}^{r} \frac{|\vec{r}||d\vec{r}|\cos 0}{r^3} \\ &= GMm \int_{\infty}^{r} \frac{r\,dr}{r^3} = GMm \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = -\frac{GMm}{r}\bigg|_{\infty}^{r} = -\frac{GMm}{r} - 0 = -\frac{GMm}{r} \end{aligned}$$

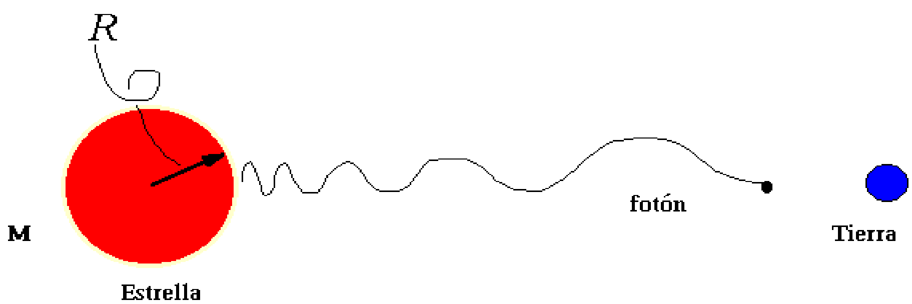
por lo tanto

$$\boxed{V(r) = -\frac{GMm}{r}}$$

donde como ya vimos $0 < r < \infty$. Regresando a nuestro tema, aunque un fotón no tiene masa en reposo, se comporta como si tuviera masa inercial:
Recuerde que $E = h\nu$ para un fotón de frecuencia $\nu$ y $h$ es la constante de Planck, entonces

$$\begin{aligned} E &= h\nu \quad \text{y} \\ E &= mc^2 \quad \text{, entonces} \\ mc^2 &= h\nu \\ m &= \frac{h\nu}{c^2} \end{aligned}$$

Ahora, cabría preguntarnos si el fotón tiene masa gravitatoria o no, según el principio de equivalencia de la relatividad general que vimos anteriormente, la respuesta es Sí.




De la figura anterior y usando la fórmula para la energía potencial, la energía potencial para un fotón en la superficie de la estrella es;

$$V(R) = -\frac{GMm}{R}$$

donde m es la masa del fotón dada por $m = h\nu/c^2$, entonces

$$V(R) = -\frac{GMh\nu}{c^2R}$$

La energía total del fotón en la superficie de la estrella es

$$E_T = E_k + V(R) = h\nu - \frac{GMh\nu}{c^2R} = h\nu(1 - \frac{GM}{c^2R})$$

La energía total del fotón en la Tierra es puramente cinética $E_T = h\nu'$, ambas energías deben ser iguales (primera ley de la Termodinámica), así que

$$h\nu' = h\nu(1 - \frac{GM}{c^2R})$$

$$\boxed{\nu' = \nu\left(1 - \frac{GM}{c^2R}\right)}$$

como $0 \leq GM/c^2R \leq 1$, tenemos que $\nu' \leq \nu$. Asi que la frecuencia es menor al llegar el fotón a la Tierra.
Ha este fenómeno se le llama “Corrimiento gravitacional al rojo” y es diferente al efecto doppler relativista.

## 15. Evolucion de las estrellas [9]

Hay cuatro maneras diferentes en las que las partículas que forman el Universo pueden interactuar entre sí. Cada una de ellas es una variedad particular de *interacción*, o usando un término anticuado *fuerza*.

| Fuerza | Intensidad relativa |
|---|---|
| Nuclear | $10^3$ |
| Electromagnética | 1 |
| Débil | $10^{-11}$ |
| Gravitacional | $10^{-39}$ |

Cada partícula en el Universo es fuente de una o más de estas fuerzas. Cada partícula sirve como centro de un volumen de espacio en el que existe la fuerza con una intensidad que disminuye al aumentar la distancia desde la fuente. El volumen de espacio en el que se hace sentir la fuerza se conoce como *campo de fuerza*.
De las cuatro fuerzas la nuclear y la débil, se hacen sentir solamente a distancias del orden de $10^{-13}$ cm o menos (distancias que corresponden al orden del diámetro del núcleo atómico), partículas que producen fuerza nuclear y responden a ella son el protón y el neutrón.
La fuerza gravitacional, por más débil que sea, se puede acumular indefinidamente a medida que se agrupe más y más materia en un lugar, ya que cada partícula de materia añade su propio campo gravitatorio al total. Aunque la resistencia a la compresión de los átomos interiores puede llegar hasta cierto límite, las fuerzas que producen la compresión puede aumentar sín límites.
La fuerza electromagnética resiste la compresión y soporta las presiones de las capas terrestres al ser empujadas hacia adentro por el campo gravitacional de la Tierra. También soportan, las mucho mayores presiones de las capas de Júpiter empujadas hacia adentro por su enorme campo gravitacional. Un dato que resulta interesante es que los átomos que se encuentran en el interior de la Tierra tienen un diámetro de un 85% de aquellos que se encuentran en la superficie, es decir, los electrones han sido empujados en un 15% de la distancia hacia el núcleo central, y ese pequeño empuje hacia adentro crea suficiente presión hacia afuera como para equilibrar lo peor que pueda lograr la atracción gravitacional de la Tierra hacia el centro.
Los átomos sin embargo tienen un punto de resistencia límite. La masa de Sol, un millar de veces mayor que la de Júpiter, bajo el empuje hacia adentro de una enorme atracción gravitacional sobrepasa los límites de resistencia de los átomos intactos.
La presión en el centro del Sol es de 100 000 millones de atmósferas, o sea 10 000 veces más que la de Júpiter. La constante acumulación de materia fortalece la intensidad gravitacional hasta el punto en que sobrepasa a la fuerza electromagnética que conserva intactos los átomos, y esos átomos, por decirlo así, se derrumban. Las capas de electrones se destrozan bajo la presión, y los electrones se pueden mover sin que los retengan aquellas capas. Se unen para formar una especie de fluido electrónico no estructurado, que ocupa menos espacio del que llenarían como parte de las capas en átomos. Dentro del fluido electrónico, los núcleos se mueven libremente y pueden aproximarse entre sí, tan cerca como el azar determine. La materia en que se convierten las capas de electrones una vez rotas y en la cual se mueven los núcleos en un fluido electrónico recibe el nombre de *materia degenerada* o *plasma*, la cual es mucho más densa que la materia ordinaria, y posee características de un gas.
Esta alta densidad debida a las altas presiones provoca un incremento notable de la temperatura del núcleo solar, de tal forma que provoca que los núcleos de hidrógeno se muevan a muy altas velocidades en espacios más reducidos llegando a producirse fusiones entre ellos. (4 núcleos de hidrógeno que consisten cada uno de ellos en protones, se fusionan para producir un átomo de helio el cual consiste en 2 protones y 2 neutrones, los productos de la reacción poseen una masa mayor que el resultado de la reacción misma, la diferencia de masa es convertida en energía, de acuerdo a la fórmula $E = mc^2$).

**Gigante Roja**

El Sol ha estado consumiendo hidrógeno en sus hornos atómicos durante unos 5000 millones de años y aún así queda suficiente para durar por lo menos entre 5 y 8000 millones de años más. A medida que el Sol use el hidrógeno y acumule helio en su centro, el núcleo se contraerá más al concentrarse los átomos más pesados en la porción interior del campo gravitacional, la fuerza gravitacional aumentará y en consecuencia el núcleo se hará más denso y cálido de nueva cuenta. El calor adicional forzará a que las regiones exteriores del Sol se expandan enormemente. Aunque el calor total de las regiones externas del Sol será entonces considerablemente más elevado que ahora, se extenderá una superficie bastante mayor. Cada fracción de esta superficie tendrá menos calor que ahora, y la nueva superficie será más fría que la actual. A esa temperatura más baja su brillo será rojizo. Esta combinación de gran tamaño y color rojizo para una estrella se le conoce con el nombre de etapa de *Gigante roja*.

**Enana Blanca**

El centro del Sol, sin embargo, habrá alcanzado una temperatura suficientemente alta para entonces (por lo menos 100 millones de °C, cf. 15 millones °C actualmente) que causará que los átomos de helio que se han formado de los átomos de hidrógeno durante los pasados eones, se fundan en un núcleo aún más grande y así sucesivamente hasta formarse núcleos de hierro (El proceso es hidrógeno, helio, carbón, neón, magnesio y finalmente hierro, de hecho en una gigante roja prácticamente ya se ha agotado todo el hidrógeno disponible, siendo las reacciones de fusión en ésta las que parten del helio), cada uno de los cuales tendrá 26 protones y 30 neutrones, unos cuantos protones más se transformaran en neutrones y al final la estrella será una mezcla de 45/55 de protones y neutrones (Cada vez que un protón se convierte en un neutrón se expulsa una partícula de masa igual al del electrón pero con carga positiva -positrón-, una vez formado éste, se aniquilará con algún electrón produciendose un rayo gamma - La mitad de los electrones son aniquilados de esta manera en el Sol en el curso de su vida como estrella normal- ). Una vez que se ha formado hierro, la materia llega a un callejón sín salida. No hay disponible más energía para las reacciones nucleares. Cuando esto sucede, no hay entonces nada que pueda resistir la atracción hacia adentro del campo gravitacional producido por su propia masa, y finalmente la resistencia expansiva debida al calor producido por las reacciones nucleares cede ante ese empuje, y el Sol expandido como gigante roja se encogerá.

Al encogerse la estrella, los electrones del centro de ésta entran en contacto, los núcleos átomicos están mucho más juntos pero tienen todavía espacio suficiente para moverse, este tipo de materia tiene propiedades de gas (esto debido a que los núcleos ocupan $1/4000,000,000$ del volumen del átomo) la situación con los electrones es lo que pone un alto finalmente a la contracción, esta etapa en la vida de una estrella es llamada *enana blanca*.

**Enana Negra**

El centro de una enana blanca es considerablemente más denso que el promedio de la estrella. Cuando se forma una enana blanca, tiene una temperatura muy elevada, ya que la energía de de los impactos se ha convertido en calor. Este calor se va perdiendo eventualmente, no habiendo cambios significativos en la estructura de la enana blanca, hasta que ésta ya no esté lo suficientemente caliente como para brillar, convirtiendose así en una *enana negra*, continuando el enfriamiento por los eones hasta que el contenido de energía sea solamente el promedio del Universo (unos pocos de grados Kelvin por encima del cero absoluto).

Hay un punto en que el núcleo de una enana blanca no puede soportar el peso de la masa que lo rodea, este punto o límite se le llama límite de *Chandrasekhar*. Más allá de este límite el fluido electrónico no puede soportar el peso no importando que tan comprimido esté. El núcleo de una estrella en esa situación se desintegrará. La masa crítica correspondiente a ese límite, según lo demostró Chandrasekhar, es *1.4 veces la masa del Sol*. El límite puede variar de acuerda a que sí la enana blanca se halle girando rápidamente, ya que las fuerzas centrífugas ayudarían a “levantar” hacia arriba algo de masa.

**Supernovas**

Suponga que nos allamos en el proceso evolutivo de gigante roja de algúna estrella. Mientras más masiva sea una estrella, mayor será la temperatura de su núcleo en el momento de expansion a gigante roja. La combinación de una gran masa y mayor calor producen una gigante roja más y más grande. También mientras más masiva sea la estrella, será más rápida su contracción cuando llegue ese momento, ya que será mayor el campo gravitacional que impulsa el proceso de la contracción. Ocurre que las capas interiores se mueven más rápidamente hacia el centro dejando atrás las más delgadas capas exteriores, no quedando estas ya como parte de la materia que se continua contrayendo. El resultado será, entonces, una enana blanca (enana blanca, si es que la porción que sigue como un todo queda con una masa menor al límite de Chandrasekhar) rodeada de una corteza de gas.

Los fotones son fácilmente absorbidos por la materia, por lo que se absorben tan pronto como se forman. Después son reformados y reabsorbidos un número indefinido de veces, de tal forma que solo se pueden mover a la velocidad de la luz en los dos diminutos y raros intervalos entre formación y absorción. El resultado es que toma a los fotones alrededor de un millón de años viajar desde el centro de la estrella, donde se forman, hasta la superficie, de donde escapan. Así, es muy pequeña la pérdida de energía central a causa de los fotones, y al emitirlos las estrellas irradian su energía de modo lento y consistente y pueden durar miles de millones de años.

Los neutrinos que se forman no reaccionan con la materia (o lo hacen en forma imperceptible), y una vez que se forman en el centro, pasan a través de las capas exteriores de la estrella a la velocidad de la luz como si no hubiese nada, tardando unos 3 segundos en viajar del centro del Sol hasta su superficie. En las estrellas ordinarias, el porcentage de energía emitida en forma de neutrinos es muy pequeña, por lo que solo necesitamos considerar fotones.

A temperaturas de 6000 millones de °C la clase de reacciones nucleares que tienen lugar empiezan a formar neutrinos en grandes cantidades. Tales situaciones ocurren en estrellas con masa suficiente, y cuando se llega al punto crítico en el que de pronto se forman un gran número de neutrinos, todos ellos escapan de la estrella en cuestión de segundos, llevando consigo energía y quitando al núcleo la atracción gravitatoria hacia adentro. El resultado es que el centro de la estrella se enfría súbitamente, tal vez en pocos minutos, y la estrella se enjunta con una rapidez mucho mayor de la que ocurre en el caso de la formación de nebulosas planetarias. Con la súbita y abrumadora implosión de la estrella, la temperatura general se eleva enormemente debido a la conversión de la energía garvitatoria en calor, y todo el combustible nuclear que queda en la estrella se fusiona casí de inmediato. Esto da origen a una enorme explosión de la estrella -*supernova*-, trayendo como consecuencia que la estrella brille temporalmente tan intensamente como toda una galaxia.

**Estrella de Neutrones**

En el estallido de una supernova, la estrella se desace del 97% o 98% de su masa para que posiblemente le reste menos de 1.4 veces la masa del Sol y pueda encogerse sin problemas para formar una enana blanca.

Pero si esto no ocurre, es decir, que la masa que quede de la estrella sea superior a 1.4 veces la masa del Sol, la atracción gravitacional hacia adentro será demasiado intensa para equilibrarse por medio del fluido electronico como en el caso de una enana blanca. Dentro de ese fluido electrónico los electrones serán empujados hacia adentro en una densidad en la cual no pueden existir, de los protones y neutrones que se habían estado moviendo libremente, los primeros se combinarán con los electrones para formar neutrones adicionales que debido al enorme campo gravitatorio se agruparán hasta que estén en virtual contacto.

De este modo ya no será fuerza gravitacional contrarrestada por la fuerza electromagnética como ocurre en los planetas, estrellas ordinarias y aún en las enanas blancas, sino por la fuerza nuclear que es mucho más potente que la electromagnética, la estrella así formada por neutrones en contacto recibe el nombre de *estrella neutrón*, y dicho fluido neutrónico se le llama *neutronium* que alcanza una densidad de $10^{15}$ veces la densidad de la materia ordinaria. Si el Sol (con un diámetro de 1, 400, 000 Km) se convirtiese en una esfera de neutronium ésta sería de sólo 14 Km y con una densidad promedio de $1400X10^{12}\,g/cm^3$, cf. $1.41\,g/cm^3$ del Sol actualmente.

**Pulsares**

Una estrella neutrón deben poseer un campo magnético al igual que las estrellas ordinarias, pero ese campo magnético debe estár comprimido y concentrado de la misma manera que lo está la propia estrella neutrón, debido a ésto el campo magnético debe ser más intenso que el de las estrellas ordinarias. Tambíen la estrella pudiese haber estado girando antes de la implosión, por lo que seguirá girando pero aún más rápidamente después de la implosión (recuerde una patinadora que gira, al tener extendidos los brazos, la patinadora tiene una cierta velocidad angular, a medida que ella recoge los brazos, la velocidad angular se incrementa). Los polos magnéticos no son necesariamente los polos de rotación (e.g. la Tierra), cada polo magnético puede girar alrededor del polo de rotación en un segundo o menos y descargar electrones al hacerlo. Al descargar estos electrones, éstos cambian su trayectoria debido al campo magnético y campo gravitacional de la estrella neutrón. Al perder energía posiblemente no lleguen a escapar pero la energía que pierden se manifiesta en forma de microondas o inclusive en forma de luz visible. De esta manera, una estrella neutrón emite dos chorros de microondas o luz visible desde los lados opuestos de su diminuto globo, tal vez esos chorros estén en la dirección de la Tierra los cuales serán recibidos como breves pulsaciones en cada rotación, a esta estrella de neutrón que emite pulsaciones se le llama *Pulsar*.

**Hoyos Negros**

A fín de que se forme una estrella enana blanca, un remanente de menos de 1.4 veces la masa del Sol deberá quedar después de la contracción de una gigante roja o la explosión de una supernova. Si ese remanente de masa es mayor que 1.4 pero menor de 3.2 veces la masa del Sol el residuo estelar se convertirá en una estrella neutrón. ¿Pero qué pasa si el remanente de masa es mayor a 3.2 veces la masa del Sol?

Cualquier masa que se contraiga y que tenga más de 3.2 veces la masa del Sol no puede detener su encogimiento en la etapa de enana blanca o de estrella neutrón, sino debe continuar más allá. Además, parece que cualquier estrella que inicialmente tenga 20 veces las masa del Sol no podrá eliminar suficiente masa por medio de la explosión de supernova como para hacer posible su conversión en una enana blanca o una estrella neutrón, sino que eventualmente su contracción llegará a cero.

Si la materia de una estrella neutrón continúa contrayéndose y se hace más intensa la gravedad superficial, seguramente llegará una etapa en que la velocidad de escape igualará o superará a la velocidad de la luz. El radio de un cuerpo donde ocurre esto recibe el nombre de *radio de Schwarzschild*. El punto cero en el centro tiene un nombre de *singularidad de Schwarzschild*. Para una masa igual a la del Sol, el radio de Schwarzschild es un poco menos de 3 Km. Estos objetos superencogidos no solamente actúan como un agujero, sino como un agujero negro, ya que como se mencionó la velocidad de escape es igual o mayor a la velocidad de la luz, de hecho es por esta razón que se les llama *agujeros negros*. Con la excepción de los agujeros negros todos los objetos pueden perder masa (En casos especiales también ocurrirá con los agujeros negros).

De acuerdo con la teoría de la relatividad general de Einstein, los agujeros negros pueden tener cualquier tamaño. Todo objeto que posee una masa, no importa lo pequeña que pudiera ser esa masa, también tendrá un campo gravitacional. Si el objeto se comprime para formar un volumen más y más pequeño, ese campo gravitacional se vuelve más y más intenso en su inmediata vecindad y finalmente llegará a ser tan intenso que la velocidad de escape de su superficie sea mayor que la velocidad de la luz. En otras palabras, se habrá encogido hasta menos de su radio de Schwarzschild.

La Tierra sería un agujero negro si se encogiera hasta un diámetro de 0.87 cm. Una masa de $10^{-5}$ g se convertiría en un agujero negro si se redujera a un diámetro a algo así como $10^{-33}$ cm, con lo cual su densidad sería $10^{94}$ g/cm$^3$ (A esa densidad un objeto del tamaño de un núcleo atómico contendría una masa igual a la de todo el Universo).

Pero que puede comprimir a los objetos pequeños para formar *miniagujeros negros* (Los objetos grandes como las estrellas se comprimen debido a su propia gravedad). No pueden ser sus propios campos gravitacionales, sino debe ser alguna fuerza compresora externa. ¿Pero qué fuerza proveniente del exterior puede tener la suficiente potencia como para producirlos?

En 1971 el astrónomo Stephen Hawking sugirió que una fuerza de este tipo pudo originarse en el momento en que se formó el universo; la fuerza del mismo gran estallido (*Big Bang*). Con grandes cantidades de materia explotando por todos lados pudieron haber chocado diferentes secciones de la substancia en expansión. Una parte de esta materia al chocar pudo haberse comprimido bajo presiones enormes desde todas direcciones. La materia comprimida pudo enjuntarse entonces hasta un punto en que la creciente intensidad gravitacional la mantendría encogida para siempre así los miniagujeros negros serían formados.

Stephen Hawking piensa que debe haber 300 miniagujeros negros por cada año luz cúbico.

| Objeto | Velocidad de Escape (Km/s) | Peso |
|---|---|---|
| Tierra | 11.2 | 70 Kg |
| Júpiter | 60.5 | 189Kg |
| Sol | 617 | 2000Kg |
| Enana Blanca | 3,400 | |
| Estrella Neutrón | 200,000 | 20 billones de Kg |

15.1. **Reacciones nucleares en el interior de las estrellas.** En las reacciones nucleares en el interior de una estrella (todo se desarrolla en su núcleo), 4 protones, es decir, 4 núcleos de Hidrogeno son fusionados debido a la gran energía cinética que possen (debida a las grandes temperaturas en el interior producidas por la enorme presión gravitatoria):

- Ciclo Protón-Protón (bajas temperaturas como en nuestro Sol): Un protón ${}_1^1\mathrm{H}$ se fusiona con otro protón ${}_1^1\mathrm{H}$ produciendo un núcleo de deuterio ${}_1^2\mathrm{H}$, un positrón $e^+$ y un neutrino $\nu$:

$$ {}_1^1\mathrm{H} +_1^1 \mathrm{H} \rightarrow_1^2 \mathrm{H} + e^+ + \nu $$

Después, otro protón se fusiona con el deuterio de la reacción nuclear anterior, produciendo Helio-3 ${}_2^3\mathrm{H}$ y un rayo gamma o fotón $\gamma$:

$$ {}_1^1\mathrm{H} +_1^2 \mathrm{H} \rightarrow_2^3 \mathrm{H} + \gamma $$

Otra reacción similar ocurre:

$$ {}_1^1\mathrm{H} +_1^1 \mathrm{H} \rightarrow_1^2 \mathrm{H} + e^+ + \nu $$
$$ {}_1^1\mathrm{H} +_1^2 \mathrm{H} \rightarrow_2^3 \mathrm{H} + \gamma $$

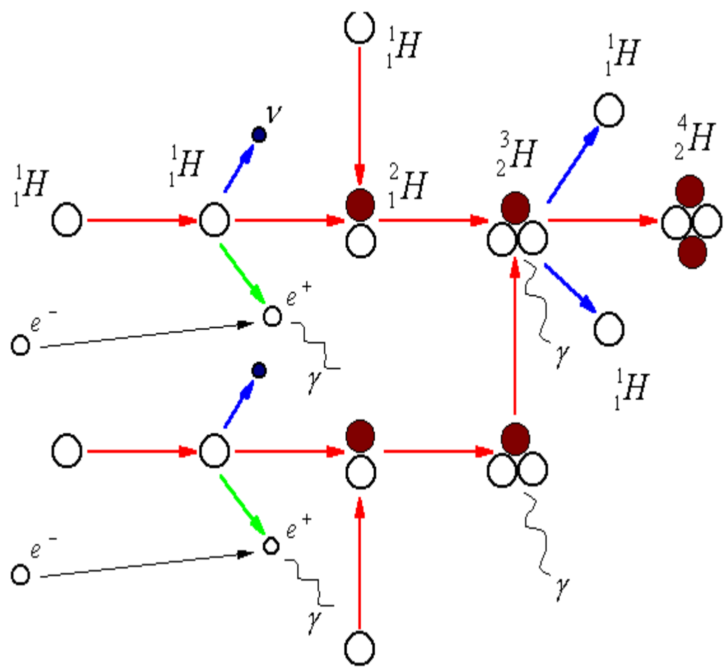
Se tienen entonces dos Helio-3 ${}_2^3\mathrm{H}$, los cuales se fusionan produciendo un núcleo de Helio-4 o partícula $\alpha$ ${}_2^4\mathrm{H}$ y dos protones libres:

$$ {}_2^3\mathrm{H} +_2^3 \mathrm{H} \rightarrow_2^4 \mathrm{H} +_1^1 \mathrm{H} +_1^1 \mathrm{H} $$

El positrón emitido $e^+$ se anulará con cualquier electrón produciendo otro fotón $\gamma$:

$$ e^+ + e^- \rightarrow \gamma $$

La energía desprendida es $(\Delta m)c^2$, donde $\Delta m$ es la diferencia entre la masa de los 4 protones, la partícula alfa y los positrones y llega a valer 24.7Mev. El neutrino se lleva el 10% de los 24.7Mev.




- Ciclo del Carbono. En general, el ciclo del carbono es más eficiente a altas temperaturas, mientras que el de protón-protón lo es para las bajas. Por lo tanto, las estrellas más calientes que el Sol deben su energía principalmente al ciclo del carbono, mientras que las más frías se lo deben al ciclo protón-protón.

$$ {}_1^1\mathrm{H} +_6^{12} \mathrm{C} \rightarrow_7^{13} \mathrm{N} $$

$$
\begin{aligned}
{}^{13}_{7}\mathrm{N} &\rightarrow {}^{13}_{6}\,\mathrm{C} + e^{+} + \nu \\
{}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{13}_{6}\,\mathrm{C} &\rightarrow {}^{14}_{7}\,\mathrm{N} + \gamma \\
{}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{14}_{7}\,\mathrm{N} &\rightarrow {}^{15}_{8}\,\mathrm{O} + \gamma \\
{}^{15}_{8}\mathrm{O} + &\rightarrow {}^{15}_{7}\,\mathrm{O} + e^{+} + \nu \\
{}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{15}_{7}\,\mathrm{N} &\rightarrow {}^{12}_{6}\,\mathrm{C} + {}^{4}_{2}\,\mathrm{He}
\end{aligned}
$$